

УДК 531/534(075.8)

DOI: <http://dx.doi.org/10.20535/0203-377129201567193>

Д. І. Ільчишина¹, доцент, О. М. Іванова², старший викладач

НАБЛИЖЕНІ СПОСОБИ ОЦІНКИ КОЕФІЦІЄНТА ВІДНОВЛЕННЯ ПРИ СПІВУДАРІ ПРУЖНИХ ТІЛ

En

We consider the elementary theory, which explains the presence of Newton recovery factor at the collision of elastic bodies, which, as shown by the authors, is less than unity. The existence of a recovery factor less than unity at the collision of elastic bodies can be explained by the fact that at the moment of an impact there occurs redistribution of kinetic momentum between a hitting element and striking element. Scientific and methodological value of the article rests in the expansion of the physical meaning of the coefficient of restitution, which has been introduced by Newton.

¹ Національний технічний університет України "КПІ",
кафедра приладів і систем керування літальними апаратами

² Національний технічний університет України "КПІ",
кафедра приладів і систем керування літальними апаратами

Recovery Ratio is, on the one hand, a characteristic of physical properties of substances of the colliding bodies, while, on the other hand, it characterizes redistribution of kinetic momentum, and of course the kinetic energy between the colliding bodies.

Ru

Рассматривается элементарная теория, объясняющая наличие неньютонского коэффициента восстановления при соударении упругих тел. Этот коэффициент, как показывают авторы, меньше единицы. Коэффициент восстановления является, с одной стороны, характеристикой физических свойств веществ соударяющихся тел, а с другой, характеризует перераспределение количества движения и, конечно, кинетической энергии между ударяющим и ударяемым телами.

Вступ

Теорія удару, яку викладають в курсах теоретичної механіки, спирається на уявлення про коефіцієнт відновлення, відомий ще з часів І. Ньютона. Це поняття застосовується також в різних технічних розрахунках.

Але експерименти та теоретичні дослідження в межах теорії пружності не підтверджують уявлення І. Ньютона про те, що коефіцієнт відновлення при співударі пружних тіл дорівнює одиниці. Це видно з даних які наводяться, як правило, у всіх підручниках з теоретичної техніки. При по-вздовжньому співударі стержнів коефіцієнт відновлення, як відомо, може біти від'ємним [1].

Постановка задачі

Метою даної статті є елементарне визначення коефіцієнта відновлення при співударі пружних тіл на підставі теорії подібної до теорії Г. Герца, запропонованої М. О. Кільчевським [2].

Оцінка коефіцієнта відновлення при ударі

Квазістатична теорія типу теорії Г. Герца пов'язана з введенням фіктивних об'ємних сил, які протилежні за напрямком, та за величиною дорівнюють силам інерції. Введення цих сил приводить до коефіцієнта відновлення, більшого за одиницю.

Нижче буде показано, що згаданий коефіцієнт відновлення дозволяє визначити дійсний коефіцієнт відновлення на підставі елементарних міркувань.

Теорія Г. Герца співудару твердих тіл приводить до класичного коефіцієнта відновлення, який дорівнює одиниці, та є, по суті, теорією руху матеріальної точки, яка знаходиться під дією нелінійної поновлючої сили. Цю нелінійність треба віднести до слабкої нелінійності, оскільки закон ру-

ху точки та зв'язані з ним величини можна з достатньою точністю апроксимувати звичайним гармонійним коливанням.

Розглянемо два способи оцінки коефіцієнта відновлення при співударі пружних тіл.

I. Систему тіл, що співударяються, замінимо тілом маси

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Нехай це тіло ударяється об плиту, яка підтримується пружиною з нелінійною залежністю між повздовжнім зміщенням плити і силою взаємодії P_H між тілом та плитою. Будемо позначати індексом «н» всі величини, які визначаються за класичною теорією Герца; індексом «к» - всі величини, що визначаються за уточненою теорією типа теорії Герца.

Приведемо масу плити та пружини до точки початкового контакту між тілом і плитою та позначимо m_0 . Ця маса включається в рух при $t = +0$ та є джерелом фіктивної сили, яка діє на плиту та пружину. Вона зменшує силу взаємодії між тілом та пружними елементами при $V_K > 0$.

Її імпульс дорівнює

$$\int_0^t \vec{F} dt = m_0 \vec{V}_K. \quad (1)$$

бо для частинок тіла, по якому ударяють, початкова швидкість дорівнює нулю та приєднана маса m_0 рухається разом з тілом зі швидкістю, яка дорівнює швидкості руху тіла.

Застосовуючи теорему імпульсів до тіла, яке ударяє, знайдемо

$$mV_K - mV_0 = m_0 V_K \sigma(t) - \int_0^t P_H dt. \quad (2)$$

Ця рівність містить проекції векторів \vec{V}_K , \vec{V}_0 та \vec{P}_H на вісь Ox , яка напрямлена вздовж осі пружини у бік початкового руху тіла, яке ударяє. Тут $\sigma(t)$ – функція Хевісайда.

Перший член у правій частині (2) описує зменшення сили взаємодії при $\vec{V}_K > 0$. Позначимо момент закінчення удару через t^* . Тоді

$$\int_0^{t^*} P_H dt = 2mV_0. \quad (3)$$

Та з (2) маємо

$$V_K(t^*) = -\frac{m}{m - m_0} V_0, \quad \varepsilon_K(t^*) = \frac{m}{m - m_0}, \quad (4)$$

де $\varepsilon_K(t^*)$ – коефіцієнт відновлення

Збільшення m_0 приводить до збільшення ε_K . На підставі [2], [3] знайдемо

$$\frac{m}{m - m_0} = 1,32, \quad m_0 \approx 0,244 m \quad (5)$$

Таким чином, результат що випливає із змісту книги [1] дозволяє знайти приведену масу m_0 пружних елементів системи.

Зауважимо, що чисельне значення $\frac{m}{m - m_0} = 1,32$ потребує подальшого уточнення.

Розглянемо тепер дійсний рух тіла, яке ударяє, враховуючи вплив сил інерції пружних елементів. Маємо

$$mV - mV_0 = \int_0^t P_K dt - m_0 V \sigma(t). \quad (6)$$

Тут P – дійсна сила контактної взаємодії між тілами. Ця сила невідома. Якщо покласти

$$P_x \approx P_{Hx} = -P_H. \quad (7)$$

Тоді

$$V(t^*) = -\frac{m}{m + m_0} V_0. \quad (8)$$

Отже

$$\varepsilon(t^*) = \frac{m}{m + m_0} = \frac{1}{1,244} \approx 0,82 \quad (9)$$

Зроблене вище припущення щодо сили P істотне.

Покажемо, що об'єднання викладеної тут теорії та змісту статті [2] приводить до значно меншої величини коефіцієнта відновлення.

II. Диференціюючи (2), знайдемо

$$m \frac{dV_K}{dt} = -P_H + P_{(i)}; \quad m \frac{dV_H}{dt} = -P_H, \quad (10)$$

де

$$P_{(i)} = \frac{d}{dt} m_0 V_K. \quad (11)$$

При визначенні знака $P_{(i)}$ розглядаються сили, що прикладені до тіла, яке ударяє, а не до пружних елементів.

На підставі (10) дістанемо

$$P_{(i)} = m \left(\frac{dV_K}{dt} - \frac{dV_H}{dt} \right). \quad (12)$$

Знайдемо наближено справжню силу взаємодії

$$P = P_H + P_{(i)} = m \left(\frac{dV_K}{dt} - 2 \frac{dV_H}{dt} \right) = -P_x. \quad (13)$$

Підставляючи (13) в (6) та приймаючи до уваги, що

$$V_{K_0} = V_{H_0} = V_0 \quad (14)$$

одержимо

$$(m + m_0)V = -m(V_K - 2V_H), \quad (15)$$

звідки

$$(m + m_0)V(t^*) = -m(V_K(t^*) - 2V_H(t^*)),$$

або на підставі (4) – (5) матимемо

$$(m + m_0)V = -m \left[2 - \frac{m}{m - m_0} \right] V_0 = -0,68mV_0. \quad (16)$$

Отже, приймаючи до уваги (9), дістанемо

$$V = -0,68 \frac{m}{m - m_0} V_0; \quad \varepsilon(t^*) = -0,68 \cdot 0,82 \approx -0,556. \quad (17)$$

Це – найменше значення коефіцієнта відновлення із знайдених нами.

Мабуть слід надати перевагу значенню $\varepsilon = 0,68$, оскільки ми одержали його при найменшій кількості додаткових припущень.

Найнижче значення ε наближається до значення коефіцієнта відновлення для сталі, яке наводиться в підручниках з теоретичної механіки.

Все сказане вище не усуває основний недолік теорії типу теорії Г. Герца. Він полягає у відсутності явної залежності між частинними властивостями речовини тіл, які співударяються, та коефіцієнтом відновлення. Знайдені нами значення коефіцієнта відновлення, як і в елементарній теорії, однакові для тіл, які співударяються, та не залежать від властивостей речовини тіл.

Насправді коефіцієнт відновлення залежить від конкретних властивостей речовини тіл, які співударяються.

Висновки

Розглянуто уточнення методу обчислення коефіцієнта відновлення при співударі тіл. Показано, що значення коефіцієнта відновлення, як і в

елементарній теорії, однакові для тіл, що співударяються, та не залежать від властивостей речовин тіл.

Список використаної літератури

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л. ОНГИ. НКТП СССР. 1935. 674 с.
2. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел.. Удар. К. «Наукова думка», 1976. 319 с.
3. Кильчевский Н.А. Шальда Л.М. К теории соударений упругих тел.. Известия АН СССР, Механика твердого тела № 6 1973. 5 с.