

УДК 529.3

С. І. Трубачев, О. М. Алексейчук

## **РОЗРАХУНОК ЦИЛІНДРИЧНИХ ТОВСТОСТІННИХ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ**

### **Вступ**

Використання циліндричних оболонок з отворами широко застосовується в різних галузях народного господарства. Розв'язання задачі про напружено деформований стан такого типу конструктивних елементів є необхідною складовою при визначенні допустимих режимів експлуатації конструкцій, прогнозуванні ресурсу, дослідженні вібро- і сейсмостійкості [1].

Складність розв'язання такої задачі полягає у великій кількості отворів, що значно ускладнює постановку задачі, фактично робить неможливим її розв'язання без введення додаткових припущень і обмежень. Використання методу скінченних елементів при розв'язанні задачі з урахуванням всіх отворів, викликає істотне зростання розмірності задачі, що призводить до занадто високим вимогам до обчислювальної техніки, з точки зору обсягу пам'яті і швидкодії.

Одним із способів розв'язання даного типу завдань є використання методу наведеної жорсткості конструкції, коли перфорована оболонка замінюється суцільною з жорсткістю, еквівалентною жорсткості перфорованої. Використання еквівалентних по жорсткості оболонок в розрахункових моделях виправдано, якщо необхідно оцінити напружено-деформований стан об'єктів приєднаних до перфорованої оболонки. Для визначення напружено-деформованого стану самої перфорованої оболонки даний метод можна використовувати тільки в першому наближенні, оскільки він не враховує концентрацію напружень, яка виникає від значної кількості невеликих отворів.

Мета роботи полягає в побудові чисельного алгоритму аналізу напружено-деформованого стану перфорованої циліндричної товстостінної оболонки.

### Постановка і розв'язання задачі

Важливим класом задач термопружності є завдання, в яких розглядаються тіла обертання, що знаходяться в умовах вісесиметричного термомеханічного навантаження. Ці завдання зручно розглядати в циліндричній системі координат. Оскільки область дослідження напружено-деформованого стану та умови навантаження неосесиметричні, то компоненти  $U_r$  та  $U_z$  вектора переміщень  $\vec{U}$ , тензорів деформацій та напружень залежать не тільки від осової  $z = x_3$ , але й радіальної координат. Залежність від кутової координати  $\varphi$  відсутня, кутовий компонент  $U_\varphi$  вектора переміщень  $\vec{U}$  дорівнює нулю. У цьому випадку співвідношення Коші, які розв'язують компоненти тензора деформації і вектора переміщень приймають вигляд [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{U_r}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}; \quad \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi r} = 0; \\ \gamma_{rz} = \gamma_{zr} = \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right); \quad \gamma_{z\varphi} = \gamma_{\varphi z} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для лінійно-пружного ізотропного матеріалу можна отримати вирази для компонентів тензора напружень:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{2G}{1-2\mu} \left( (1-\mu)\varepsilon_{rr} + \mu(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) - (1+\mu)\varepsilon^T \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{1-2\mu} \left( (1-\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \mu(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr}) - (1+\mu)\varepsilon^T \right) \\ \sigma_{zz} = \frac{2G}{1-2\mu} \left( (1-\mu)\varepsilon_{zz} + \mu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - (1+\mu)\varepsilon^T \right) \\ \tau_{rz} = \tau_{zr} = G\gamma_{rz} = G\gamma_{zr}, \end{cases} \quad (2)$$

де  $G$  та  $\mu$  – модуль зсуву та коефіцієнт Пуасона,  $\varepsilon^T$  – температурна деформація. При цьому  $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0$  і  $\tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0$ .

З трьох рівнянь рівноваги для тривимірного випадку, при розгляді вісесиметричної задачі залишаються тільки два рівняння у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + f_r^0 = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + f_z^0 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

де  $f_r^0$  та  $f_z^0$  – радіальний і вісевий компоненти заданого вектора розподіленої об'ємної сили. Якщо на частині контуру  $\Gamma'$  осьового перерізу тіла обертання задані розподілені поверхневі сили з компонентами  $p_r^0$  і  $p_z^0$ , то силові граничні умови необхідно представити в вигляді:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}n_r + \tau_{rz}n_z = p_r^0 \\ \tau_{rz}n_r + \sigma_{zz}n_z = p_z^0, \end{cases} \quad (4)$$

де  $n_r$ ,  $n_z$  – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до частини контуру  $\Gamma'$ .

Кінематичні граничні умови на частині контура  $\Gamma''$  осьового перерізу приймають вигляд:

$$U_r(p) = U_r^0(p), U_z(p) = U_z^0(p); p \in \Gamma'' \quad (5)$$

де  $U_r^0(p)$  і  $U_z^0(p)$  – компоненти заданого вектора  $U^0(p)$  переміщень точок  $p \in \Gamma''$ .

Таким чином для розв'язання вісесиметричної задачі термопружності необхідно знайти десять функцій: два компоненти вектора переміщень і по чотири компоненти тензорів деформації і напружень, використовуючи два рівняння рівноваги (3), і по чотири співвідношення Коші (1) і закону Гука (2), задовольняючи при цьому граничним умовам (4) і (5).

Розглянемо розв'язок вісесиметричної задачі в переміщеннях. Об'ємну деформацію висловимо, як [3]

$$\theta = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) U_r = \frac{\partial U_z}{\partial z} + D U_r, \quad (6)$$

де  $D = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$  – відповідний оператор.

Якщо підставити (6) в фізичні рівняння (2), а потім вирази, отримані для напружень підставити в умови (3) при постійних значеннях фізико-механічних властивостей конструкційного матеріалу і відсутності об'ємних сил для ізотермічної задачі теорії пружності, отримаємо два диференціальних рівняння відносно двох функцій  $U_z(r, z)$  і  $U_r(r, z)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} D \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial}{\partial z} (D U_r) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (D U_r) + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Інтегруючи рівняння (7), знайдемо функції  $U_z(r, z)$  і  $U_r(r, z)$ , які повинні задовольняти рівнянню (7) і граничним умовам на поверхні, записаними в переміщеннях.

Введемо оператор  $D^2$  так, що

$$D^2 = \frac{\partial}{\partial r} D = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (8)$$

Якщо з умов (7) виключити величину,  $U_z$ , тоді матимемо

$$\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} D \frac{\partial U_r}{\partial r} + D^2 D^2 U_r = 0. \quad (9)$$

Аналогічно можна скласти диференціальне рівняння четвертого порядку, якому має задовольняти переміщення  $U_z$

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} D \frac{\partial U_z}{\partial z} + \left( D \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 U_z = 0. \quad (10)$$

Отже, розв'язання вісесиметричної ізотермічної задачі теорії пружності в переміщеннях звелось до розв'язання двох диференціальних рівнянь четвертого порядку (9) і (10).

У випадку, коли тіла обертання мають складну геометричну форму або неоднорідні фізико-механічні характеристики по осі обертання і радіусу, використання аналітичних методів розв'язання задачі про визначення напружено-деформованого стану є неефективним, тому необхідно орієнтуватися на чисельні методи, наприклад, метод скінченних елементів (МСЕ) [4] – [7].

У більшості випадків при розв'язанні вісесиметричної задачі за допомогою (МСЕ) розв'язання зводиться до знаходження на двовірній сітці скінченних елементів вузлових значень двох компонентів вектора переміщень  $U = (U_r, U_z)^T$ . Це дозволяє при вирішенні вісесиметричної задачі використовувати двовимірні скінченні елементи, як і у випадку плоскої задачі. Але у випадку, коли вісесиметрична конструкція має складну форму, наприклад, перфоровані товстостінні циліндричні оболонки, які широко використовуються в енергетиці, виникає питання постановки задачі і вибору типу скінченних елементів. Враховуючи те, що в отворах перфорованих товстостінних оболонок виникає концентрація напружень, доцільно вико-

ристовувати тривимірні скінченні елементи і розглядати задачу в тривимірній постановці.

У даній роботі для розрахунку перфорованих оболонок використовували тривимірний восьми вузловий призматичний скінченний елемент. Вибір такого підходу дозволяє з високою точністю визначити напружено-деформований стан конструкційних елементів з урахуванням концентрації напружень поблизу отворів.

Розглянемо товстостінний перфорований циліндр із зовнішнім діаметром 1072 мм, товщиною стінки 136 мм, і діаметром отворів перфорації 13,2 мм. Розподіл отворів перфорації по поверхні циліндра наведено на рис. 1.

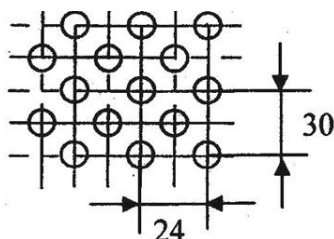


Рис. 1. Схема розміщення отворів перфорації

Циліндр навантажений внутрішнім тиском, рівним 10 МПа, матеріал циліндра – нержавіюча сталь 08X18H10T з наступними механічними властивостями: модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона = 0,24. Циліндр може розширюватися без перешкод. Один кінцем циліндр зафіксовано в осьовому напрямку.

У зв'язку з тим, що при даній постановці задачі, розподіл напружень симетричний, в розрахунковій моделі можливо розглядувати не цілий циліндр, а деяку його частину. Так при розв'язанні задачі за допомогою оболонкових скінченних елементів доцільно розглядати циліндричне кільце. Спочатку було розглянуто перфороване кільце, що навантажене внутрішнім тиском. При цьому переміщення кільця в радіальному напрямку складало 0,132 мм. Такому переміщенню відповідає товщина суцільного циліндричного кільця яка дорівнює 65 мм. При цьому максимальне напруження в суцільному кільці складало – 59 МПа, а в перфорованому кільці – 101,5 МПа. На рис. 2 показана концентрація напружень, причиною якої є перфорація оболонки круглими отворами. Величина коефіцієнта концентрації напружень досягає 2.

## Висновки

В роботі наведено аналітичний опис задачі теорії пружності для перфорованого товстостінного циліндра. Показано, що для розв'язання задач про напружено-деформований стан перфорованих циліндрів необхідно використовувати чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів.

Причому для товстостінних перфорованих циліндрів доцільно використовувати тривимірні скінченні елементи. У роботі показано, що розв'язок задачі з урахуванням наведеної жорсткості для оболонкової моделі дає занижене значення напружень та не враховує концентрацію напружень на внутрішній поверхні оболонки.

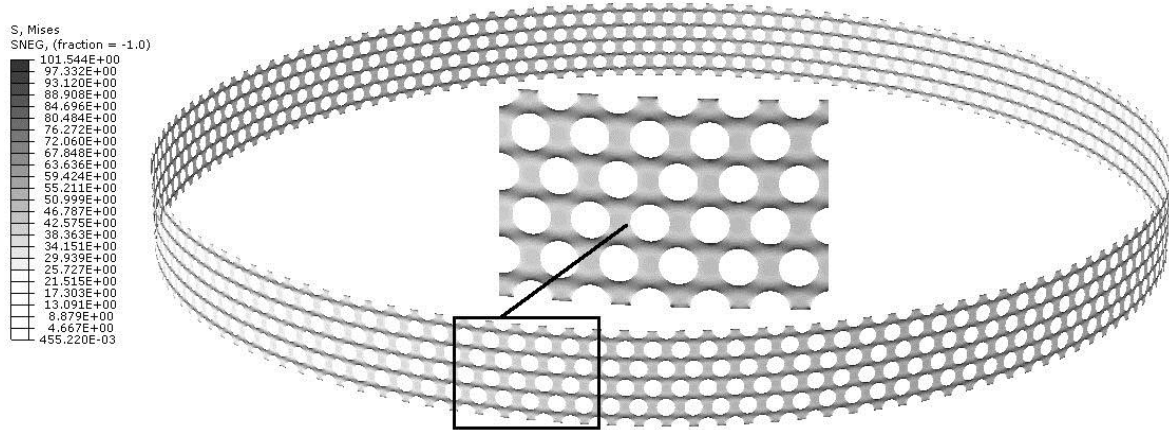


Рис. 2. Концентрація напружень в перфорованому кільці

### Список використаної літератури

1. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки/ Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – М. : Наука, 1970.– 556 с.
2. Зарубин В. С., Станкевич И. В. Расчет теплонапряженных конструкций. / В. С. Зарубин, И. В. Станкевич – М.: Машиностроение, 2005. – 352 с.
3. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: Підручник./ М. С. Можаровський – К.: Вища школа., 2002 – 308 с.
4. Зенкевич О. С. Метод конечных элементов в технике/ О. С. Зенкевич. – М.: МИР, 1975. – 542с.
5. Getting Started with ABAQUS. – USA, Abaqus inc., 2003 – 497 p.
6. FKM – Guideline, *Analytical Strength Assessment Of Components In Mechanical Engineering*, 5th, revised edition, English Version, Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), – Frankfurt/Main, 2003 – 268 p.
7. Норри Д., Фрид Ж. Введение в метод конечных элементов./ Д. Норри, Ж. Фрид – М.:Мир.1981 – 304 с.