УДК 531.383

В. Н. Федоров

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГЕОГРАФИЧЕСКОГО МЕРИДИАНА ТРЕХСТЕПЕННЫМ МАЯТНИКОВЫМ ГИРОКОМПАСОМ ВО ВРЕМЯ РАЗГОНА ЕГО РОТОРА

Вступление

Необходимость определения положения плоскости географического меридиана имеет место в различных областях человеческой деятельности – в геодезии и картографии, на транспорте, в военном деле и пр. При этом в зависимости от решаемой задачи требования по точности и времени определения колеблются в достаточно широких пределах. Для решения указанной задачи в различных условиях разработаны, спроектированы, изготовлены и эксплуатируются измерительные приборы, отличающиеся по принципу действия, составу, конструкции, стоимости и т.д. Каждый из приборов – лидеров в своей области постоянно совершенствуется – конструктивно, технологически, методически и пр.

В данной статье рассматривается наземный трехстепенной маятниковый гирокомпас с торсионным подвесом неуправляемого чувствительного элемента, оснащенный высокоточным цифровым датчиком угла азимутального положения чувствительного элемента и блоком обработки информации. При обработке информации применен косвенный метод [1] получения данных о начальных отклонениях динамических систем.

В процессе совершенствования прибора выяснилось, что дальнейшее повышение точности связано с необходимостью учета следующего фактора. Во время измерения вокруг вертикальной оси чувствительного элемента действует постоянный неконтролируемый момент, обусловленный эксплуатационными причинами, различный от измерения к измерению. Указанный момент смещает центр азимутальных колебаний чувствительного элемента, с которым, в соответствии с принятой методикой отождествляется азимут северного направления, на постоянную величину. Для автокомпенсации этой погрешности были предложены несколько методов, основанных на проведении измерений с разными, но фиксированными параметрами прибора. Однако указанные меры более чем вдвое удлиняли процесс измерений.

В статье предлагается определять положение географического меридиана на основе анализа азимутального движения чувствительного элемента гирокомпаса в процессе разгона его ротора. Указанное предложение может принести двоякий выигрыш в вопросе сокращения времени измерений: во-первых, режим разгона ротора становится «штатным», а не балластным режимом работы гирокомпаса, как это было ранее; во-вторых, отпадает необходимость в специальных мерах борьбы с вертикальными вредными моментами, так как смещение положения равновесия, вызванное действием последних, является переменным во времени, что позволяет определить величину вредного момента в процессе одного измерения.

Постановка задачи

Уравнения движения трехстепенного маятникового гирокомпаса на неподвижном относительно Земли основании, с учетом действующего вокруг вертикальной оси чувствительного элемента неконтролируемого вредного момента M = const, имеют вид

$$H\dot{\alpha} + HU_{\Gamma}\beta + mgl\beta + HU_{\text{в}} = 0$$
$$H\dot{\beta} + \dot{H}\beta - HU_{\text{г}}\alpha = M, \qquad (1)$$

где H – кинетический момент гироскопа,

U_{Γ} и $U_{\text{в}}$ – горизонтальная и вертикальная составляющие угловой скорости вращения Земли в месте проведения измерений,

α и β – текущие углы отклонения оси ротора гирокомпаса от меридиана и плоскости горизонта соответственно,

mgl – маятниковость гирокомпаса.

Нетрудно видеть, что при постоянном значении кинетического момента $\left(\dot{H}=0\right)$ решение системы уравнений (1) при $mgl \gg HU_{\Gamma}$ по азимутальной координате α будет иметь вид

$$\alpha = \left(\alpha_0 + \frac{M}{HU_г}\right)\cos\omega t + \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega}\sin\omega t - \frac{M}{HU_г}\ , \qquad (2)$$

где α_0 – начальный угол отклонения оси ротора от меридиана,

$\dot{\alpha}_0$ – его начальная угловая скорость.

Из выражения (2) можно сделать вывод, что при H = const чувствительный элемент гирокомпаса совершает гармонические азимутальные колебания с известной частотой $\omega = \sqrt{\frac{mglU_{\Gamma}}{H}}$ и неизвестной амплитудой, зависящей от начальных условий α и $\dot{\alpha}_0$. Это азимутальное движение осуществляется относительно положения, смещенного от меридиана на неизвестный, постоянный при M = const, угол $\alpha_{\text{частн.}} = -\frac{M}{HU_{\Gamma}}$. Поскольку азимутальный датчик измеряет угол отклонения оси ротора относительно корпуса прибора, будем считать, что измеряемой величиной является угол отклонения оси ротора относительно своего начального положения, т.е. $\alpha - \alpha_0$. Преобразовав выражение (2) к виду

$$\alpha-\alpha_0=\left(\alpha_0+\frac{M}{HU_г}\right)(\cos\omega t-1)+\frac{\dot{\alpha}_0}{\omega}\sin\omega t,$$

видим, что применение методики [1] позволит оценить угол $\alpha_0+\frac{M}{HU_г}$ между начальным положением оси ротора и положением, смещенным от меридиана на $\frac{M}{HU_г}$, а не угол α_0 между начальным положением оси ротора и истинным положением меридиана.

Основная часть

Найдем решение системы уравнений (1) по азимутальной координате α в случае изменения кинетического момента по линейному закону:

$$H=H_0+ht, \tag{3}$$

где H_0 – начальное значение кинетического момента,

h – скорость изменения кинетического момента,

t – текущее время.

Два уравнения (1) с учетом $mgl \gg HU_г$ и выражения (3) могут быть приведены к одному уравнению второго порядка относительно интересующей нас переменной α:

$$H\ddot{\alpha}+2\dot{H}\dot{\alpha}+U_г mgl\alpha=-2\dot{H}U_в-MH^{-1}mgl. \tag{4}$$

Введем новую независимую переменную

$$z=2\sqrt{bH},$$

где
$$b=mglU_г h^{-2}.$$

Тогда, определяя t из (3)

$$t=(H-H_0)h^{-1}$$

и обозначая $\alpha'=\frac{d\alpha}{dz}$; $\alpha''=\frac{d^2\alpha}{dz^2}$, запишем уравнение (4) в виде

$$z^2\alpha''+3z\alpha'+z^2\alpha=-2U_В b^{-1}h^{-1}z^2-M4bU_г^{-1}. \tag{5}$$

Однородное уравнение, соответствующее (5), является уравнением Бесселя и имеет решение [2]

$$\alpha=C_1z^{-1}I_1(z)+C_2z^{-1}Y_1(z),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные,

$I_1(z)$ и $Y_1(z)$ – функции Бесселя 1-го порядка первого и второго рода соответственно.

Частное решение уравнения (5), полученное применением методики вариации произвольных постоянных, после некоторых преобразований с использованием рекуррентных соотношений для функций Бесселя [3], [4] можно представить в виде

$$\alpha_{частн} = -2U_{\text{В}} b^{(-1)} h^{(-1)} - M\, 4bU_{\Gamma}^{(-1)} z^{(-2)}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\alpha = C_1 z^{-1} I_1(z) + C_2 z^{-1} Y_1(z) - 2U_{\text{в}} b^{-1} h^{-1} - M 4bU_{\text{г}}^{-1} z^{-2}. \tag{6}$$

Решение уравнения (9) ищем при начальных условиях

$$t = 0 => \alpha(0) = \alpha_0;\ \beta(0) = \beta_0;\ H(0) = H_0\big(z(0) = z_0 = 2\sqrt{bH_0}\big). \tag{7}$$

Из первого уравнения системы (1) определяем

$$\beta = -H(mgl)^{(-1)}(\dot{\alpha} + U_2),$$

и, подставляя в него предварительно продифференцированное выражение (6), получаем

$$\beta = C_1 \frac{I_2(z)h}{2mgl} + C_2 \frac{Y_2(z)h}{2mgl} - \frac{U_{\text{в}} z^2}{4bmgl} - M \frac{4bh}{U_{\text{г}} z^2 mgl}, \tag{8}$$

где $I_2(z)$ и $Y_2(z)$ – функции Бесселя 2-го порядка первого и второго рода соответственно.

Подставляем в выражения (6) и (8) начальные условия (7) и определяем постоянные интегрирования C_1 и C_2, после чего, произведя несложные преобразования, окончательно запишем аналитический закон движения чувствительного элемента в горизонтальной плоскости при линейном разгоне ротора в виде

$$\begin{aligned}\alpha = {} & \alpha_0 \frac{\pi z_0^2}{2z}[I_2(z_0)Y_1(z) - Y_2(z_0)I_1(z)] + \beta_0 mgl \frac{\pi z_0}{zh}[Y_1(z_0)I_1(z) - \\ & -I_1(z_0)Y_1(z)] \frac{Mz_0}{U_1 H_0 z}\left\{\frac{\pi z_0}{2}[I_2(z_0)Y_1(z) - Y_2(z_0)I_1(z)] + \right. \\ & \left. +\pi[Y_1(z_0)I_1(z) - I_1(z_0)Y_1(z)] - \frac{z_0}{z}\right\} + \frac{U_2}{h}\left\{\frac{\pi z_0^2}{bz}[I_2(z_0)Y_1(z) - \right. \\ & \left. -Y_2(z_0)I_1(z)] + \frac{\pi z_0 H_0}{z}[Y_1(z_0)I_1(z) - I_1(z_0)Y_1(z)] - \frac{2}{b}\right\}.\end{aligned} \tag{9}$$

Предполагая, как и ранее, что измеряемой величиной является угол отклонения оси ротора от своего начального положения, т.е. $\alpha - \alpha_0$, выражение (9) с учетом обозначений:

$$f_1(z) = \frac{\pi z_0^2}{2z}[I_2(z_0)Y_1(z) - Y_2(z_0)I_1(z)] - 1;$$

$$f_2(z) = mgl \frac{\pi z_0}{zh}[Y_1(z_0)I_1(z) - I_1(z_0)Y_1(z)];$$

$$f_3(z) = \frac{z_0}{U_1 H_0 z}\left\{\frac{\pi z_0}{2}[I_2(z_0)Y_1(z) - Y_2(z_0)I_1(z)] + \right.$$

$$+\pi[Y_1(z_0)I_1(z) - I_1(z_0)Y_1(z)] - \frac{z_0}{z}\Big\};$$

$$f_4(z) = \alpha - \alpha_0 - \frac{U_2}{h}\Big\{\frac{\pi z_0^2}{bz}[I_2(z_0)Y_1(z) - Y_2(z_0)I_1(z)] +$$
$$+\frac{\pi z_0 H_0}{z}\Big[Y_1(z_0)I_1(z) - I_1(z_0)Y_1(z) - \frac{2}{b}\Big]\Big\}.$$

Можно записать так:

$$f_4 = \alpha_0 f_1 + \beta_0 f_2 + M f_3.$$

Производя изменения в дискретные моменты времени можно, применяя при обработке информации, например, метод наименьших квадратов, найти наилучшие оценки $\widehat{\alpha_0}$, $\widehat{\beta_0}$, $\widehat{M}$ неизвестных. Оценка $\widehat{\alpha_0}$ дает однозначную информацию о положении плоскости географического меридиана.

Выводы

В статье предложена методика определении положения географического меридиана трехстепенным маятниковым гирокомпасом, основанная на анализе азимутального движения чувствительного элемента в режиме линейного разгона его ротора. Получены аналитические выражения, описывающие движение чувствительного элемента в указанном режиме с учетом действия вокруг его вертикальной оси постоянного неконтролируемого момента. Означенные аналитические выражения могут быть положены в основу построения алгоритма оценивания параметра, указывающего положение плоскости меридиана.

Предложенная методика позволит существенно сократить время определения меридиана за счет двух факторов:

- отсутствия необходимости в специальных средствах борьбы с вертикальным неконтролируемым моментом,
- использования времени разгона ротора, ранее считавшегося балластным, для набора информации об азимутальном движении чувствительного элемента.

Дальнейшие исследования, совершенствующие применение указанной методики, возможны в направлениях

- алгоритмического учета и компенсации других (кроме постоянного) видов неконтролируемых моментов, возникающих в процессе эксплуатации гирокомпаса;

– разработки алгоритмов определения меридиана при иных (отличных от линейного) законах изменения кинетического момента ротора гирокомпаса.

Список использованной литературы

1. *Ройтенберг Я. Н.* О некоторых косвенных методах получения информации о положении управляемой системы в фазовом пространстве // Я. Н. Ройтенберг / ПММ,1961. т. XXУ, вып. 3, с.440-444.
2. *Камке* Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Э. Камке / – М. : Наука, 1971. – 576 с.
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
4. *Янке Е*. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы // Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш/ - М.: Наука, 1977. – 344 с.