

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ГАЗА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРУБЕ

Введение

Решение задач в режиме реального времени (РВ) требует реализации алгоритмов адекватного вычисления параметров пульсирующего турбулентного потока в горизонтальной полубесконечной цилиндрической трубе, что можно рассматривать как систему управления с распределёнными параметрами [1], [2].

Целью работы является решение задачи нестационарного потока в полубесконечной цилиндрической трубе, которое будет использовано для исследования параметров потока: поля скоростей, напряжений, энергии. В общей постановке, для произвольных начальных условий и известной функции изменения перепада давления по времени, задача была исследована в работах Громеки [3] и других авторов [4] – [6].

Постановка задачи

Уравнение нестационарного осесимметричного движения газа [3] - [5] в цилиндрической системе координат запишем в виде такой краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = f(t) \\ -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = f(t) \end{cases} \quad (1)$$

где:

$$w(a, t) = 0; \quad w(r, 0) = \gamma(r) - w_0; \quad \begin{cases} f \in [0, T] \\ r \in [0, a]; \end{cases} \quad w(0, t) < \infty \quad (2)$$

с граничным $w|_s = 0$ и начальными условиями

$$w|_{t=0} = \varphi(r)|_{t=0} = w(r, t = 0) = \frac{\alpha^2 \Delta p}{\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) f(t) \quad [1], [2],$$

где $f(t) = \frac{\Delta p}{\mu L} \Psi(t)$, $\Psi(t)$ – функция изменения перепада давления по времени;

$\Delta p/L$ – перепад давления на длине L ; $0 \leq t \leq T$; $0 \leq r \leq a$.

Также задана функция начального условия в виде параболического профиля: $w|_{t=0} = \varphi(r)$.

Причем

$$\varphi(r) = \frac{\alpha^2 \Delta P}{\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right); \quad f(t) = \frac{\Delta P}{\rho L} \psi(t), \quad (3)$$

Метод

Решение (1, 2) будем искать в виде суммы двух функций [1], [5], [7]:

$$w(r, t) = \theta(r, t) + \Omega(r, t), \quad (4)$$

где $\theta(r, t)$ – вынужденное изменение движения газа от изменения градиента давления при отсутствии начального движения, а $\Omega(r, t)$ – изменение движения, вызванное начальным условием.

Решение (4) находим методом разделения переменных (методом Фурье). Так функция $\Omega(r, t)$ определяется из следующего однородного уравнения:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) = 0. \quad (5)$$

с нулевым граничным условием Дирихле $\Omega|_{r=\alpha} = 0$ и начальным условием вида $\Omega|_{t=0} = \varphi(r) = \frac{\alpha^2 \Delta P}{\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)$.

В соответствии с общей идеей метода разделения переменных, частное решение однородного уравнения (5) представляем в виде

$$\Omega(r, t) = R(r)T(t). \quad (6)$$

Тогда $T'R = \gamma(R''T + \frac{1}{r}R'T)$, что возможно при выполнении соотношения $\frac{T'}{\gamma T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = -\lambda^2$, где $\lambda^2 - const$. Откуда следует система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda^2 R = 0 \\ T_n(t) = e^{-\gamma \lambda_n t}, \quad n \in N. \end{cases}$$

В результате получаем задачу Штурма - Лиувилля [5] вида:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \lambda_k^2 r R = 0.$$

Метод Фурье позволяет получить спектр частных решений вида

$$R_k(r) = A_k J_0(\lambda_k r) + B_k Y_0(\lambda_k r),$$

где A_k, B_k – произвольные постоянные; поскольку $\lim_{r \rightarrow 0} Y_0(kr) = \infty$, а решение должно быть конечным, то $B_k \equiv 0$; $J_0(\lambda_k r)$,

$Y_0(\lambda_k r)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го рода нулевого порядка соответственно [7], [8];

λ_k – собственные числа, которые определяются из соответствующих однородных граничных условий краевой задачи, то есть из граничного условия $R(a) = 0$, как корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\lambda_k a) = 0. \quad (9)$$

Положим $A_k \equiv 1$ и получим частные решения однородного уравнения (5), удовлетворяющее нулевому граничному условию Дирихле, в виде $\Omega_n(r, t) = C_n J_0(\lambda_n r) e^{-\gamma \lambda_n^2 t}$, $n \in N$.

Далее, составим функциональный ряд вида $\Omega(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r) e^{-\gamma \lambda_n^2 t}$ и потребуем выполнения начального условия (6) в виде равенства

$$\Omega(r, t) = \frac{\alpha^2 \Delta P}{\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r), \quad (7)$$

где коэффициенты Фурье находим по фундаментальной ортогональной системе функций:

$$C_n = \frac{2 \Delta P}{\mu L J_0^2(\lambda_n a)} \int_0^a \left(r - \frac{r^3}{\alpha^2}\right) J_0(\lambda_n r) dr. \quad (8)$$

Известно, что ряд (7) с учётом (8) является знакочередующимся рядом с быстро убывающими членами по всех переменным, следовательно, он быстро сходящийся.

При вычислении коэффициентов C_n (8) необходимо учитывать следующее свойство функций Бесселя $J_0(k_m r)$ [6], [7]:

$$\int_0^r r J_0(k_n r) J_0(k_m r) dr = \frac{1}{k_m^2 - k_n^2} [k_m r J_0(k_n r) J_1(k_m r) - k_n r J_0(k_m r) J_1(k_n r)].$$

При $k_m \neq k_n$ и $r = a$ правая часть этого выражения равна нулю, поскольку $J_0(k_m a) = J_0(k_n a) = 0$. Если же $m = n$, то $\int_0^a r J_0^2(k_n r) dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(k_n a)$.

Теперь решим задачу о вынужденном изменении движения жидкости, то есть найдем решение неоднородного дифференциального уравнения вида [3], [4], [7]:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) = f(t) = \rho A \cos \omega t. \quad (9)$$

При условиях

$$\Theta|_{r=0} = 0, \quad \Theta|_{t=0} = 0.$$

Решение (9) ищем в виде:

$$\Theta(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_n(t) \tilde{R}_n(r). \quad (10)$$

Причем $R_n(r)$ определяется по (6), а для определения $\tilde{T}_n(t)$ получаем линейное дифференциальное уравнения I-го порядка вида:

$$\frac{d\tilde{T}_n(t)}{dt} + \gamma k_n^2 \tilde{T}_n(t) = f_n(t), \quad (11)$$

где $f_n(t)$ являются коэффициентами Фурье разложения правой части $f(t)$ в ряд по ортонормированной с весом r системе функций $\tilde{R}_n(r)$ (10), а именно

$$f_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{\phi \alpha I_1(k_n a)} \int_0^a r f(t) I_0(k_n r) dr = \frac{\sqrt{2} f(t)}{\phi \alpha I_1(k_n a)} \int_0^a r I_0(k_n r) dr.$$

В частном случае рассмотрим установившееся пульсирующее движение, соответствующее гармоническому закону перепада давления в трубе: $f(t) = \rho A \cos \omega t$.

Поскольку [6] $\frac{d}{dx} (x^n I_n(x)) = x^n I_n(x)$, $n \in N$, поэтому $x^n I_n(x) = \int_0^x \xi^n I_n(\xi) d\xi$, и, следовательно, получаем, что $\int_0^a r I_0(k_n r) dr = \frac{a}{k_n} I_1(k_n a)$. Это обстоятельство позволяет коэффициенты $f_n(t)$ вычислить в явном виде

$$f_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{k_n} A \cos \omega t. \quad (12)$$

В силу выше представленного можно просто решить линейное дифференциальное уравнение I-го порядка (11):

$$\frac{d\tilde{T}_n(t)}{dt} + \gamma k_n^2 \tilde{T}_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{k_n} A \cos \omega t. \quad (13)$$

Решение (13) ищем в виде: $\tilde{T}_n(t) = uv$. Тогда

$$u'v + uv' + \gamma k_n^2 uv = \frac{\sqrt{2}}{k_n} A \cos \omega t \text{ или } u'v + u(v' + \gamma k_n^2 v) = \frac{\sqrt{2}}{k_n} A \cos \omega t, \text{ где:}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma k_n^2 v; \int \frac{dv}{v} = -\gamma k_n^2 \int dt; \ln v = -\gamma k_n^2 t; v = e^{-\gamma k_n^2 t};$$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{k_n} u' e^{-\gamma k_n^2 t} = \frac{\sqrt{2}}{k_n} A \cos \omega t; \int e^{\gamma k_n^2 t} \cos \omega t dt + C; u = \cos \omega t \Rightarrow$$

$$du = -\omega \sin \omega t; dv = e^{\gamma k_n^2 t} dt \Rightarrow v = \frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t}.$$

В результате получаем, что $I = \frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t} + \frac{\omega}{\gamma k_n^2} \int e^{\gamma k_n^2 t} \sin \omega t dt$.

$$\text{Вторично: } u = \sin \omega t \Rightarrow du = \omega \cos dt; dv = e^{\gamma k_n^2 t} dt \\ \Rightarrow v = \frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t}; \left[\frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t} \sin \omega t - \frac{\omega}{\gamma k_n^2} I \right] \text{ или}$$

$$I = \frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t} \cos \omega t + \frac{\omega}{\gamma^2 k_n^4} e^{\gamma k_n^2 t} \sin \omega t - \frac{\omega^2}{\gamma^2 k_n^4} I.$$

$$\text{Отсюда } I\left(1 + \frac{\omega^2}{\gamma^2 k_n^4}\right) = \frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t} \left(\cos \omega t + \frac{\omega}{\gamma k_n} \sin \omega t\right)$$

или

$$I\left(\frac{\gamma^2 k_n^4 + \omega^2}{\gamma k_n^2}\right) = e^{\gamma k_n^2 t} \left(\cos \omega t + \frac{\omega}{\gamma k_n} \sin \omega t\right),$$

$$\text{и наконец } I = \left(\frac{\gamma k_n^2}{\gamma^2 k_n^4 + \omega^2}\right) e^{\gamma k_n^2 t} \left(\cos \omega t + \frac{\omega}{\gamma k_n} \sin \omega t\right).$$

В результате получим такое замкнутое решение:

$$\tilde{T}_n(t) = \sqrt{2}A \frac{e^{-\gamma k_n^2 t}}{k_n} \left[C_n + \frac{\gamma k_n^2}{\gamma^2 k_n^4 + \omega^2} e^{\gamma k_n^2 t} \left(\cos \omega t + \frac{\omega}{\gamma k_n} \sin \omega t\right) \right].$$

При этом очевидно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\gamma k_n^2 t} = 0$.

Учитывая следующие известные соотношения [6]:

$$x^\nu J_\nu(x) = \int x^\nu J_{\nu-1}(x) dx \dots x^{-\nu} J_\nu(x) = - \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) dx$$

следует, что

$$\frac{a^2 2 \Delta P}{\mu} \int_0^a r J_0(k_n r) dr = \frac{r J_1(k_n r)}{k_n}$$

$$\text{и } -\frac{\Delta P}{\mu} \int_0^a r^3 J_0(k_n r) dr = |u = r^2; \quad du = 2r du; \quad dv = r J_0(k_n r) dr \Rightarrow$$

$$v = \frac{r J_1(r)}{k_n} | \Rightarrow \int_0^a r^3 J_0(k_n r) dr = \frac{r^3}{k_n} J_1(r) \Big|_0^a - \frac{2}{k_n} \int r^2 J_1(r) dr.$$

Поскольку $\tilde{T}_n(t)|_{t=0} = 0$, то возможно сразу определить коэффициенты C_n при $t = 0$:

$$C_n = -\frac{\gamma k_n^2}{\gamma k_n^4 + \omega^2}.$$

Далее, очевидно, что решение ограничено на оси при $r = 0$. Более того, функции (12) ограничены по модулю, очевидно, мажорирующая последовательность вида

$$|M_n| \leq \frac{|c_1|}{k_n} + \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 k_n^2 + \omega^2}}$$

Сумма ряда $\Theta(r, t)$ является непрерывной по t функцией, а также интегрируема с квадратом и весом r на $r \in [0, a]$, имеет непрерывную производную по t и непрерывные производные второго порядка по r .

Результат

Общий закон изменения скорости по времени в любом сечении трубы такой:

$$w(t) = \pi a^2 w_0 + \frac{2A}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_1}{k_n} e^{-\gamma k_n^2 t} + \frac{\gamma k_n}{\gamma^2 k_n^4 + \omega^2} (\cos \omega t + \frac{\omega}{\gamma k_n} \sin \omega t) \right] \times \left(\frac{2\pi}{i_1(k_n a)} \int_0^a r J_0(k_n r) dr + \frac{2\Delta P}{\mu L J_0^2(\lambda_n a)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \left(r - \frac{r^3}{a^2} \right) J_0(\lambda_n r) dr \cdot e^{-\gamma k_n^2 t} \times J_0(\lambda_n r) \right) \quad (14)$$

Выводы

Предложен метод решения задачи потока нестационарного пульсирующего несжимаемого изотермического газа в полубесконечной цилиндрической трубе в горизонтальной плоскости без учёта объёмных сил. Для случая периодического закона изменения давления получено решение уравнения Навье - Стокса на основе быстроходящихся двойных функциональных рядов, показана идентичность решения с решением частной граничной задачи теплопроводности.

Кром того, показано что: $\frac{\partial P}{\partial z}$ является функцией только времени; начальное условие не существенно в отличие от граничного; так как входящие в решение нули функций Бесселя известны, то вычисление компонент скорости возможно в РВ; несмотря на то, что функциональные ряды не есть знакопеременными, наличие убывающих экспонент, умноженных на ограниченную функцию, обеспечивают быструю сходимость; наличие слагаемого $k \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$ является контролем правильности решения.

Список использованной литературы

1. *Зинченко В. П.* Метод моделирования динамических процессов в аэродинамических трубах малых дозвуковых скоростей // В. П. Зинченко, В. М. Египко / К., 1996. – 19 с. (Преп./ НАН Украины Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова; 96–13).
2. *Ли Вэй* Алгоритм управления потоком в аэродинамической трубе // Ли Вэй, С. В. Зинченко, В. П. Зинченко, И. П. Муха, Э. Э. Кулиев/ УСиМ, 2014. – № 3. – С. 52 – 60.
3. *Громека И. С.* Собр. соч. – М: АПССР, 1952. – 302 с.
4. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа // Л. Г. Лойцянский / – М: Наука, 1973. - 848 с.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды // Л. И. Седов / - М.: Наука, 1973. т. 1, 2.
6. *Ногін М. В.* Періодичний рух в'язкої нестисливої рідини в необмеженій циліндричній трубі// М. В. Ногін/ Вісник ХПІ, 2013. – м. Харків, – С. 46– 54.

7. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики // А. Н. Тихонов, А. А. Самарский / - М.: Наука, 1972. – 735 с.
8. *Грей Э.* Функции Бесселя и их приложения в физике и механике // Э. Грей, Г. Метьюз / – М.: ИЛ, 1949, – 348 с.