УДК 629.7.01
DOI:https://doi.org/10.20535/0203-3771492025334118

О. М. Бондаренко[1], *к.т.н., доцент*, **А. С. Горовенко**[2], *Phd студент*

МОДЕЛЮВАННЯ ОБТІКАННЯ КРИЛА ОРНІТОПТЕРА

Ua Складено систему рівнянь для опису руху крила орнітоптера в нестисному середовищі як частковий випадок розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса. Систему рівнянь представлено в дискретному вигляді для розв'язання методом ітерацій Якобі. Верифікацію моделі проведено для двомірного масиву комірок. Для проведення обчислень складено програму універсальною мовою програмування C++. Візуалізацію результатів розрахунку виконано в реальному часі. До обчислень залучено засоби керування ресурсами відеокарти. Візуалізація поля швидкостей показала неперервність розв'язку в часі та просторі, і можливість використання розробленої моделі та ресурсів сучасних персональних комп'ютерів для аналізу руху динамічно змінюваних поверхонь літальних апаратів, зокрема, крила орнітоптера. Запропонований метод надає можливість моделювання роботи орнітоптера в реальному часі, із подальшою заміною окремих ланок моделі реальними об'єктами, прогнозуванням траєкторії руху орнітоптера та подачею керуючих команд на приводи крила для забезпечення заданого руху.

En A system of equations was developed to describe the motion of an ornithopter wing in an incompressible environment as a special case of solving the Navier-Stokes equations. The system of equations was presented in a discrete form for solution by the Jacobi iteration method. The model was verified for a two-dimensional array of cells. A program was developed in the universal programming language C++ to perform the calculations. The visualization of the calculation results was performed in real time. The means of managing the video card resources were involved in the calculations. The visualization of the velocity field showed the continuity of the solution in time and space, and the possibility of using the developed model and the resources of modern personal computers to analyze the motion of dynamically changing surfaces of aircraft, in particular, the ornithopter wing. The proposed method provides an opportunity to simulate the operation of the ornithopter in real time, with the subsequent replacement of individual links of the model with real objects, predicting the trajectory of the ornithopter and sending control commands to the wing actuators to ensure the specified movement.

Вступ

Однією із складних у математичному описі задач є аеродинаміка орнітоптера. Останнім часом розвиток електроніки дозволив створити низку робочих моделей орнітоптерів, що підтверджує можливість їх створення [1, 2]. У роботі [3] представлено спрощені математичні залежності, які

[1] *КПІ ім. Ігоря Сікорського*
[2] *КПІ ім. Ігоря Сікорського*

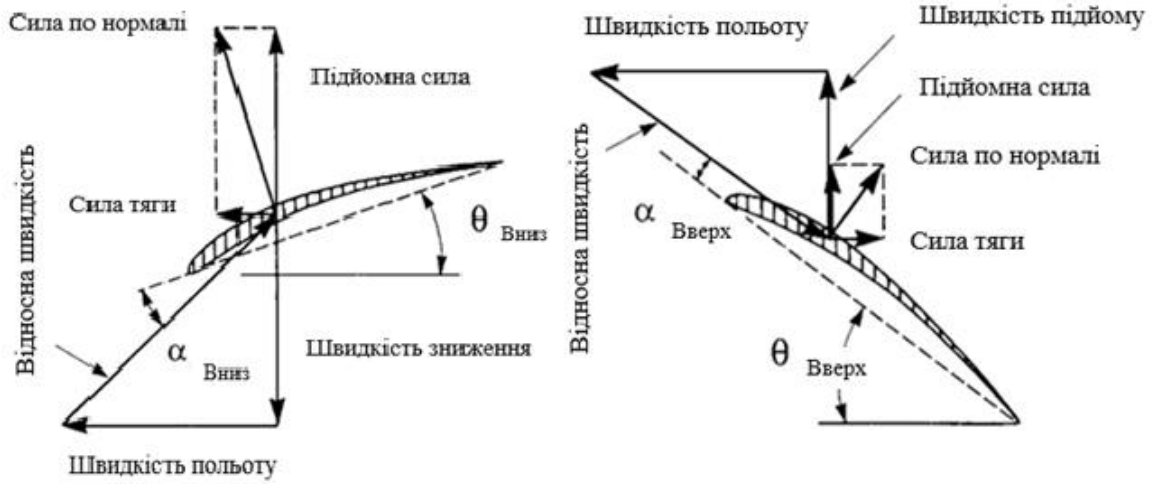
розкладають політ орнітоптера на плануючу складову, як звичайне крило, та штовхаючу, як гвинт. Такі математичні моделі саме дозволяють проєктувати робочі зразки. Переважна більшість розробників приділяють увагу опрацюванню системи керування орнітоптера. У роботі [4] розглянуто емпіричну модель махаючих крил біонічної моделі у реальному часі. Модель враховує лише рух крил із одним степенем вільності. У роботі [5] під час керування враховується два відносні рухи крила – помахи вверх-вниз та скручування хорди по довжина крила. Спробуємо проаналізувати такий рух під час моделювання обтікання крила орнітоптера у реальному часі. Для вирішення математичних задач обтікання у реальному часі будемо використовувати метод сіток, який вже десятки років відомий [6] і який для розрахунків міцності називають методом кінцевих елементів (кінцевих комірок). Метод кінцевих елементів легко програмується універсальними мовами програмування, такими як *C*++. Мова *C*++ дозволяє використовувати обчислювальні ресурси не лише штатного процесора, а й ресурсів відеокарти. За результатами таких обчислень стане актуальним питання визначення аеродинамічних навантажень на орнітоптер у його динамічному русі, оскільки можна прогнозувати траєкторію руху орнітоптера та подавати команди на приводи його крила для корегування руху в реальному часі. Стаття є продовженням робіт авторів [7] у частині програмної реалізації функціоналу (*backend*) візуалізації руху орнітоптера та створення власних обчислювальних ресурсів для визначення аеродинамічних навантажень.

Постановка задачі

Необхідно вивести та перевірити на прикладі систему рівнянь, яка дозволяє здійснювати обчислення у реальному часі тиску та швидкостей навколо профілю крила орнітоптера, який рухається в повітрі. Перевірку достатньо виконати для двовимірного випадку обтікання в проєкції на перетинаючу профіль площину. Обчислення проводити за допомогою універсальних мов програмування із доступними ресурсами сучасних персональних комп’ютерів, із кількістю комірок не більше 1 млн. Рухи крила вважати настільки повільними, щоб знехтувати впливом стисливості повітря на розподіл сил та швидкостей. Профіль крила має бути із великою кривизною серединної лінії.

Опис системи діючих сил на крило орнітоптера

Під час руху орнітоптера в повітрі, на нього діє система аеродинамічних сил – підйомна сила, сила опору, сила тяги (рис. 1) [3].



а) *б*)

Рис. 1. Розподіл сил по поверхні крила: *а*) у разі помаху вниз, *б*) у разі помаху доверху

Моделювання помаху в *CFD*-програмі [8] (рис. 2) дає можливість визначити залежність підйомної сили та сили тяги від швидкості помаху в окремий момент часу.

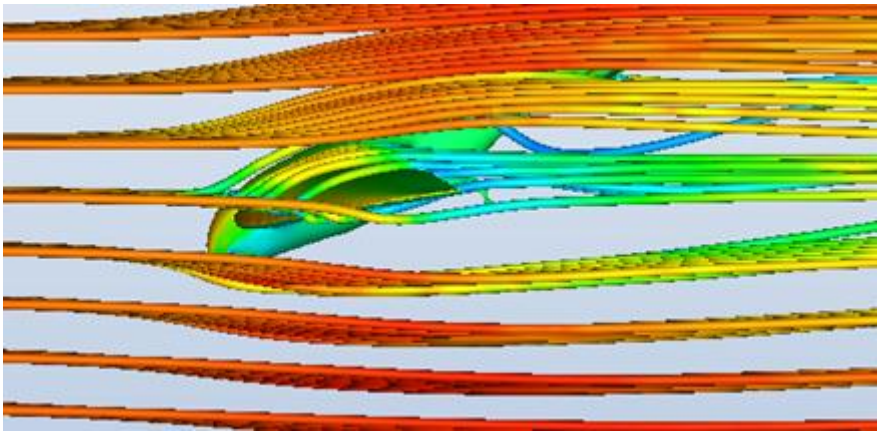


Рис. 2. Моделювання обтікання орнітоптера, як планера в *CFD*-програмі

Дані *CFD*-моделювання можна використати для верифікації програм аналітичного розв’язання рівнянь руху крила та орнітоптера вцілому.

Основні рівняння для розрахунків

До рівнянь Навье-Стокса [9] для опису аеродинамічних потоків відносяться системи рівнянь нерозривності, кількості руху, енергії, стану. Всі ці системи налічують від 3-х до 5-и рівнянь у свою чергу навіть для двовимірного випадку, і мають розв’язання лише для часткових випадків. Для математичного моделювання руху повітря навколо крила орнітоптера ско-

ристаємось скороченим рівняннями Навье-Стокса, вважаючи за малих швидкостях повітря рідиною, що не стискається (1):

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -(\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \tilde{u} + \tilde{F} \qquad (1)$$

де $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$ – прискорення

$-(\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u}$ – розподіл форми переміщення в просторі,

$-\frac{1}{\rho}\nabla p$ – сила від перепадів тиску,

$\nu \nabla^2 \tilde{u}$ – сила в'язкості (демпфування пропорційна квадрату швидкості),

F – зовнішні сили (власні рухи крила).

Для розрахунку тиску скористаємось рівнянням Пуассона

$$\nabla \cdot \tilde{w} = \nabla^2 \cdot p. \qquad (2)$$

Систему рівнянь (1) та (2) будемо розв'язувати на рівномірній сітці (рис. 3) із дискретністю δx та δy, накладеній відповідно на площину, що перетинає крило.

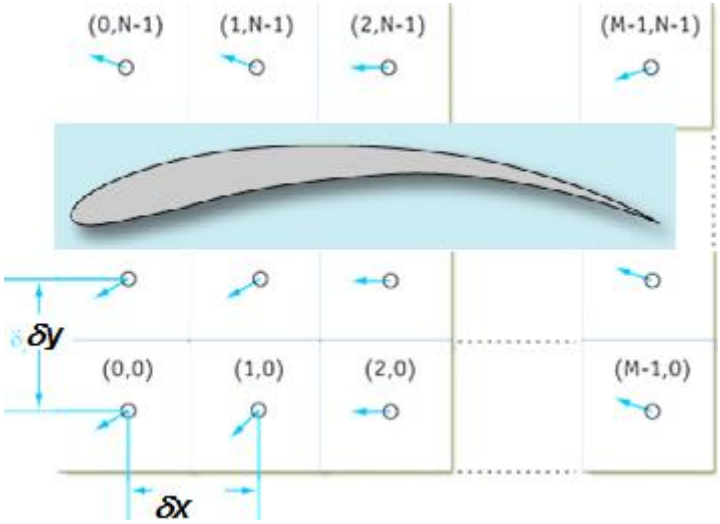


Рис. 3. Розрахункова сітка

Як граничні умови встановимо швидкість частинок на крилі протилежною до швидкості крила, а тиск на краю навколишнього кубу повітря рівним значенню безпосередньо поруч з границею.

Зовнішню силу застосуємо для кожного елемента масиву поля (G - імпульс-вектор; xp, yp – позиція миші в центрі профілю обтікання, x, y - координати поточної комірки; r – радіус дії, параметр, який масштабує; r_{af} , x_{af}, y_{af} – відстань від позиції миші до краю профілю):

$$F = G \cdot \delta t \cdot \exp\left(-\frac{\left(x - x_p + x_{af}\right)^2 + \left(y - y_p + y_{af}\right)^2}{r + r_{af}} \right). \quad (3)$$

Імпульс-вектор G пропорційний різницю між попередньою позицією миші та поточною, із відповідним масштабним коефіцієнтом.

Градієнт швидкості візуалізуємо в графічному редакторі у вигляді диференціальної залежності кольору від швидкості.

$$\frac{\partial d}{\partial t} = -\left(\tilde{u} \cdot \nabla\right) d + \gamma \nabla^2 \mathrm{d} + S\,. \quad (4)$$

де d – кількість барвника в точці (наприклад, у форматі *RGB*), γ – коефіцієнт дифузії, S – джерело кольору.

Розв'язувати рівняння (1) – (4) будемо ітеративним методом Якобі [8]

$$x_{i,j}^{(k+1)} = \frac{x_{i-1,j}^{(k)} + x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i,j-1}^{(k)} + x_{i,j+1}^{(k)} + ab_{i,j}}{\beta}, \quad (5)$$

де x – елементи масиву, що становлять скалярне або векторне поле,
b – інша впливаюча на поле величина, k — номер поточної ітерації,
k+1 – номер наступної ітерації, α і β – коефіцієнти впливу.

Алгоритм розв'язання задачі

Проєкт для розв'язання задачі містить стандартний набір файлів (модулів) проєкту мовою *C*++, основними із яких є модуль *source.cpp* із головною функцією проекту *main* (рис. 4) та модуль із описом необхідних математичних функцій *myfyn.cpp*.

У головному модулі *source.cpp* завантажуються стандартні бібліотеки та вторинні модулі проєкту, задаються параметри розрахунку, викликаються функції та екземпляри класу із інших модулів проєкту, у тому числі вікна візуалізації графіки, обчислень значень поля швидкостей та кольорового представлення цього поля. Для візуалізації обрано масив 800 на 450 точок, що сумарно менше 1 млн. комірок. Обирається невелика кількість ітерацій для обчислення – поля швидкостей 20, поля тиску – 40. Така кількість буде достатньою для візуалізації і не буде перевантажувати ресурси процесора. У цьому файлі також обираються константи із рівнянь (1) - (5), виділяється пам'ять під поля швидкостей, кольорів, тиску для обраного масиву даних. У разі події руху миші моделюється силове навантаження на поле часток за допомогою профілю крила орнітоптера (рис. 3). Орієнтація профілю враховує вектор переміщення миші по екрану від попереднього до наступного за виділений дискрет часу 0,02 с. Обчислення будуть проводитись весь час, поки відкрите вікно візуалізації, тоді як сила

буде вщухати після відпускання лівої кнопки миші. Для повільного переходу від збуреного до спокійного положення та навпаки введено додаткову силу від завихрення потоку (в алгоритмі не представлено). Для відображення кольорів на вікно візуалізації введено екземпляр класу кольорової палітри.

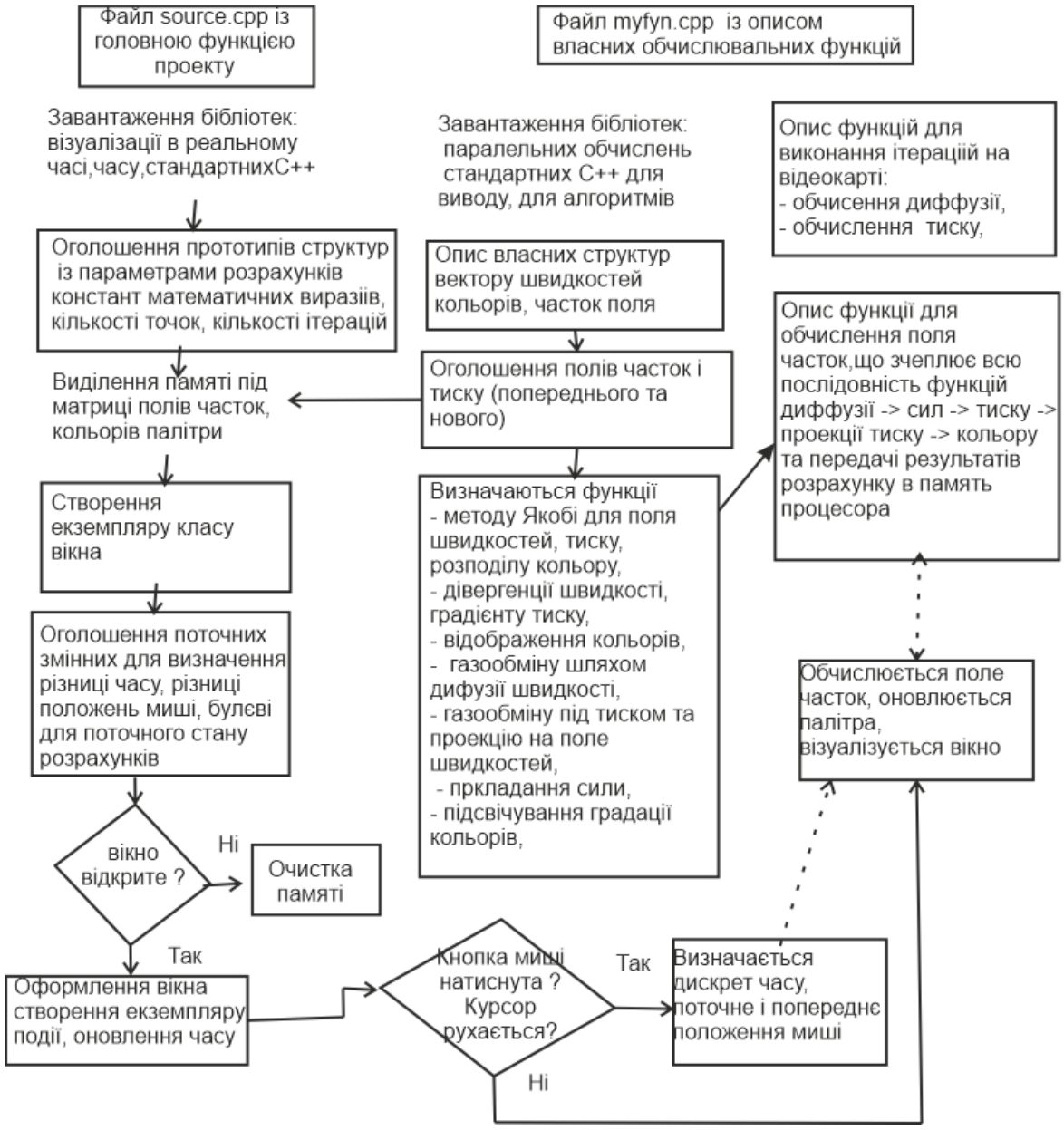


Рис. 4. Алгоритм числового розв’язання задачі обтікання нестисною рідиною

Опис необхідних математичних функцій в файлі *myfyn.cpp* доповнений також описом функцій взаємодії під час розрахунків між процесорами відеокарти та основним процесором комп’ютера. Масиви даних із обчислюваними полями передаються від функції до функції через посилання на їх місце в оперативній пам’яті. Результати відображення в кольорі поля

швидкостей (рис. 5) показують достовірність одержаних математичних моделей.

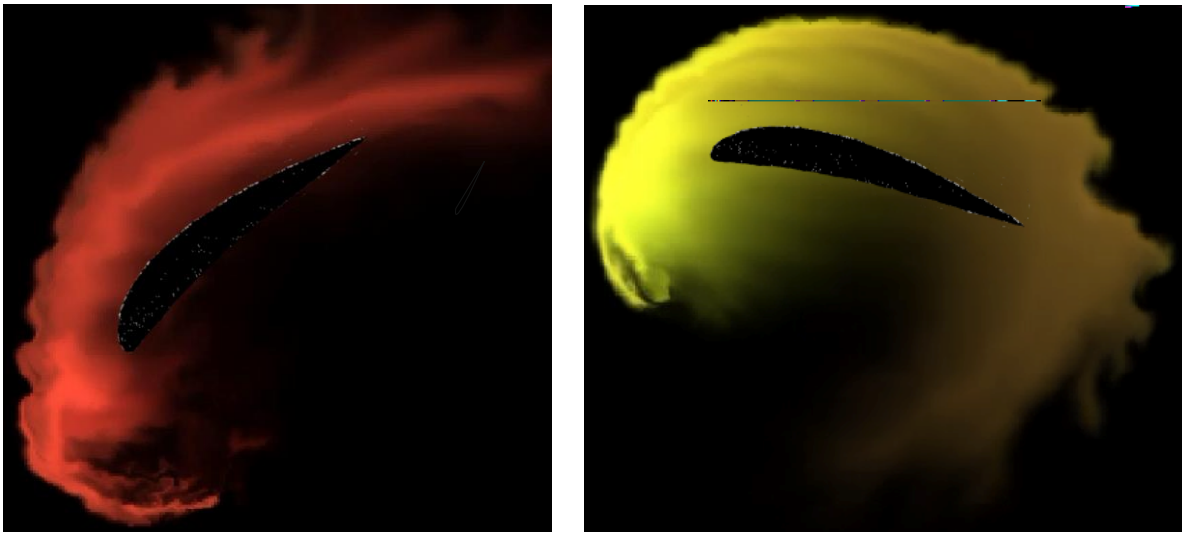


Рис. 5. Збурення навколишнього повітря при помахах крила

Висновки

Задачу визначення аеродинамічних навантажень крила орнітоптера у реальному часі, принаймні, у двомірному варіанті, можна вирішити за допомогою універсальних програмних засобів. Перегляд результатів моделювання показує, що запропонований метод розв'язання скорочених рівнянь Нав'є-Стокса дозволяє отримати рух лише тих частинок повітря, які захоплюються профілем крила в безпосередній близькості до поверхні крила (рис. 5), на відміну від прогонки всього повітря через обмежений обсяг (рис. 2), як це робиться в *CFD*-методах [8]. Такий підхід заощаджує обчислювальні ресурси і дозволяє одержати більш точні значення полів швидкості та тиску повітря під час польоту орнітоптера, як висовкодинамічної системи. Розроблений власний інструментарій для обчислення та візуалізації полів тиску і швидкостей навколишнього повітря дозволить реалізовувати необхідні запити щодо узагальнення цієї інформації. Наприклад, сума проекцій на вісі системи координат поля тиску на поверхні крила дає силові фактори на крилі – силу опору та піднімальну силу в повітрі. Сума проекцій швидкостей на систему координат дає імпульс сили тяги, інтегрування швидкості дозволяє відслідкувати траєкторію переміщення орнітоптера в просторі, і, при необхідності, її відкоригувати, за рахунок задавання необхідних сил на профіль крила орнітоптера. Задачу можна вирішувати як прямим синтезом контуру системи керування, так і за допомогою сучасних засобів машинного навчання. Інтеграція обчислень із засобами тривимірного моделювання руху орнітоптера [7] дозволить у реальному часі відслідковувати також і зміни профілю крила орнітоптера під час

помахів вверх та вниз. Одержаний розв'язок потребує подальшої верифікації експериментальним шляхом.

Список використаної літератури

1. *Festo BionicSwift* [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://www.festo.com/PDF_Flip/corp/Festo_BionicSwift/en/.
2. JSK-koubou Orthopter [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://www.youtube.com/playlist?list=PLHFFsWOXN0f9ecPwH_kBTCHSo6a8IoqNl.
3. AnOrnithopterWingDesign [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://www.ornithopter.net/Publications/AnOrnithopterWingDesign.pdf .
4. *Sanchez-Laulhe, E., Fernandez-Feria, R.,* & Ollero, A. (2022). Simplified Model for Forward-Flight Transitions of a Bio-Inspired Unmanned Aerial Vehicle. Aerospace, 9(10), 617. https://doi.org/10.3390/aerospace9100617.
5. *Cai, Y., Su, G., Zhao, J.,* & *Feng, S.* (2024). The Coupled Wing Morphing of Ornithopters Improves Attitude Control and Agile Flight. Machines, 12(7), 486. https://doi.org/10.3390/machines12070486
6. *Anderson J. D.* Fundamentals of aerodynamics. New York : McGraw-Hill, 1984. 563 p.
7. *Бондаренко О. М.* Моделювання кінцево-елементної сітки складних аеродинамічних поверхонь/ О. М. Бондаренко, Ж. В. Рябіченко // Механіка гіроскопічних систем. – № 43 – 2022. – с. 35-44.
8. *K. Taneja, R. Jaiswal* and *S. K. Kalwala*, (2020). VISHKIRA, A Gallinaceous Aircraft, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 751 012025 - [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/339118634_VISHKIRA_A_Gallinaceous_Aircraft
9. *J. E. Marsden*. A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. 3rd ed. // Chorin, A. J., J. E. Marsden. – Springer. - 1997. – 183 p.