УДК 629.73: 534.14
DOI: https://doi.org/10.20535/0203-3771492025334115

Л. А. Завротинський[1], *Phd студент*, **Д. І. Конотоп**[2], *к. т. н.*

АНАЛІЗ ВПЛИВУ МАСИ ДАТЧИКІВ НА МОДАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАДЛЕГКОГО КРИЛА ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДА СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Ua Сучасні тенденції розвитку авіації спрямовані на мінімізацію маси конструкцій з метою збільшення корисного навантаження. Ця тенденція, особливо помітна в легкій авіації та сфері БПЛА, ускладнює проведення наземних частотних випробувань через низьку масу конструкції об’єктів, що досліджуються. Ці труднощі пов’язані з необхідністю розміщення додаткової маси на поверхні ЛА для отримання його модальної моделі. Дана маса призводить до зниження точності математичної моделі у випадку її неврахування. Метою роботи є дослідження впливу маси датчиків на модальні характеристики конструкції (частота та форма коливань) під час наземних частотних випробувань. У статті було проведено розрахунок за допомогою методу скінчених елементів на моделі надлегкого крила. Дослідження проводились для 5 різних випадків. Було проведено порівняння отриманих результатів, що наведено у таблиці 1 та 2. Аналіз показав тенденцію до зменшення власних частот конструкції та зміщенню форм коливань зі збільшенням маси. Отримані результати вказують на значний вплив додаткової маси на модальні характеристики. Це у свою чергу вказує на необхідність проведення експериментальних досліджень та розробки методики проведення наземних частотних випробувань на легких конструкціях для отримання реальних модальних характеристик конструкції.

En Modern trends in aviation development focus on minimizing structural mass to increase payload capacity. This tendency, particularly noticeable in light aviation and the UAV sector, complicates the conduct of ground vibration tests due to the low mass of the objects under investigation. These difficulties are associated with the need to place additional mass on the aircraft surface to obtain its modal model. This mass leads to a decrease in the accuracy of the mathematical model if it is not taken into account. The aim of the work is to investigate the effect of sensor mass on the modal characteristics of the structure (frequency and mode shape) during ground vibration tests. In the article, a calculation was performed using the finite element method on a model of an ultralight wing. Studies were conducted for 5 different cases. A comparison of the obtained results, which are presented in Tables 1 and 2, was carried out. The analysis showed a tendency for the natural frequencies of the structure to decrease and the mode shapes to shift with increasing mass. The obtained results indicate a significant influence of the additional mass on the modal characteristics. This, in turn, points to the necessity of conducting experimental studies and developing a methodology for ground vibration testing of lightweight structures to obtain the real modal characteristics of the structure.

[1] *КПІ ім. Ігоря Сікорського*
[2] *КПІ ім. Ігоря Сікорського*

Вступ

Визначення власних частот є важливим етапом під час проектування та експлуатації складних технічних об'єктів. Запобігання явищу резонансу є однією із головних причин визначення власних частот. Але й до причини визначення власних частот можна віднести оптимізацію маси та жорсткості, підвищення комфорту пасажирів та прогнозування динамічної поведінки конструкції.

Основними методами визначення значень власних частот та форм коливань є [1]: аналітичні методи (базуються на розв'язанні математичних рівнянь, що описують динамічну поведінку конструкції та використовуються для простих конструкцій, що мають відомі геометричні характеристики та матеріали. До них відносяться методи Релея-Рітца [2], Галеркіна [3] тощо); числові методи (наближені методи, що використовують для знаходження розв'язків математичних задач, коли визначити за допомогою аналітичних методів не має змоги у зв'язку із складністю або неможливістю їх обчислення. До таких методів відносять: метод скінчених елементів [4], послідовних наближень тощо); експериментальні методи (методи, основою яких є проведення випробувань на реальних або динамічно-подібних конструкціях. Під час даних методів використовується обладнання для збудження та визначення власних значень. Такими методами є наземні частотні випробування (НЧВ), льотні вібраційні випробування та дослідження у аеродинамічній трубі).

НЧВ є невід'ємною складовою під час сертифікації літального апарату (ЛА) [5]. Вони проводяться до першого польоту ЛА. Під час НЧВ необхідно визначити модальну модель [6] (частоти, форми коливань та демпфування) об'єкту, що сертифікується. Дані параметри є ключовими для розуміння динамічної поведінки ЛА та його реакції на зовнішні збудження. Для визначення даних параметрів використовується датчики для вимірювання (акселерометри), прилади для збудження коливань (шейкер, молоток) [7].

За допомогою отриманих даних перевіряється та корегується математична модель об'єкту, що використовується для подальших флатерних розрахунків. Флатер є явищем аеропружності, що може призвести до руйнування конструкції ЛА під час польоту.

До зниження точності корекції математичної моделі можуть призвести різні фактори і під час експерименту це може бути: неврахування маси акселерометрів, що використовуються під час НЧВ, неправильна підвіска конструкції, що досліджується та інші. Для уникнення даних похибок, необхідно враховувати вплив підвіски, збуджуючих конструкцій та маси датчиків.

Існує загальне правило, за яким маса датчиків не повинна перевищувати 1/10 маси конструкції [8]. Для великих класичних ЛА дане правило є

легко виконуваним. Але наразі тенденції у розвитку авіації рухаються у напрямку зменшення маси конструкції ЛА. Дані тенденції суттєво впливають на складність дослідження легких ЛА, через крихкість та легкість їх конструкції [9]. Таким чином, необхідно використовувати легші датчики або порушувати «правило 1/10».

Постановка задачі

Метою роботи є дослідження впливу маси датчиків на модальні характеристики конструкції (частота та форма коливань) під час наземних частотних випробувань.

Теоретичне дослідження впливу додаткової маси на власні значення та форми коливань

Для кращого розуміння впливу додаткової маси на значення власних частот конструкції, розглянемо просту систему, а саме, одновимірний пружинний маятник (рис. 1).

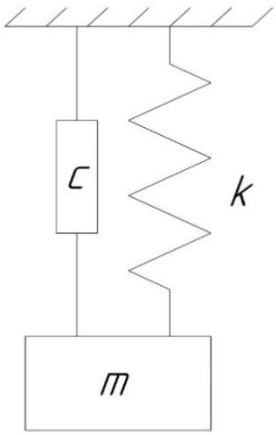

Рис. 1. Одновимірний пружинний маятник

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \tag{1}$$

де x – узагальнена координата;
m – маса системи;
c – демпфування конструкції;
k – жорсткість системи.

Для простоти приймемо, що демпфування конструкції відсутнє, тоді рівняння (1) набуде вигляду:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{2}$$

Розв’язок рівняння (2) запишемо у вигляді:

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi), \tag{3}$$

де X – амплітуда коливань;

ω – кутова частота;

φ – фаза коливань.

Підставивши розв'язок (3) у рівняння (2) отримаємо:

$$-m\omega^2 X\cos(\omega t+\varphi)+kX\cos(\omega t+\varphi)=0.$$

Для нетривіального розв'язку $(X\neq 0)$ повинна виконуватись рівність:

$$-m\omega+k=0. \tag{4}$$

Із (4) виразимо власну кутову частоту ω:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{5}$$

Власну частоту у f (у Герцах) отримуємо поділивши кутову на 2π:

$$f=\frac{\omega}{2\pi}.$$

Запишемо загальну масу системи, як суму маси конструкції (m_{con}) та маси датчиків (m_{ac}).

$$m=m_{con}+m_{ac}. \tag{6}$$

Підставивши (6) у рівняння (5) отримаємо:

$$\omega_{con+ac}=\sqrt{\frac{k}{m_{con}+m_{ac}}}.$$

Отже, можна дійти наступного висновку, що у випадку збільшення маси частота конструкції буде зменшуватись і навпаки.

Якщо частота відхиляється від точно визначеного на 5%, то це є не допустимим і власна частота має бути скорегована [10]. Це робиться для скасування масового впливу акселерометру.

Виходячи з цього твердження розглянемо максимально можливу масу датчиків, для того, щоб впливом маси акселерометра можна було знехтувати. Візьмемо критичне значення, а саме, коли різниця 5%:

$$1\,1-\frac{\omega_{con+ac}}{\omega_{con}}=0,05.$$

Розпишемо відношення частот:

$$\frac{\omega_{con+ac}}{\omega_{con}}=\sqrt{\frac{m_{con}}{m_{con}+m_c}}.$$

Спростивши вираз, отримуємо наступну залежність:

$$m_{ac}=0,108\cdot m_{con}.$$

Отже, можна зробити висновок, що для випадків, коли маса акселерометрів менше 10% маси конструкції, впливом маси акселерометра можна нехтувати.

Проведення дослідження за допомогою методу скінчених елементів

Перевіримо, чи можна знехтувати масою встановлених акселерометрів для легких конструкції, якщо їхня маса менше за 10% від загальної маси конструкції.

Для цього проводитимемо дослідження у програмному забезпеченні *MSC Patran/Nastran*.

Дослідження будемо проводити на скінчено елементній моделі (*finite element model* (*FEM*)) розглянувши декілька випадків для закріпленого легкого трапецевидного крила, розмістивши на ньому зосередженні додаткові маси, що будуть відображати датчики. Розглядатимемо випадки з навіскою загальною масою датчиків менше 10% для перевірки твердження. Для цього експерименту було створено *FEM* балочну конструкцію, що складається з 16 елементів *Bar*2, що знаходяться на осі жорсткості крила. Два перших вузли крила відображають кріплення лонжерону, і тут знаходиться закріплення конструкції за шістьма ступеням свободи. Маса крила виражена через зосереджені маси в перерізах на відповідних відстанях. Вони поєднані з віссю жорсткості за допомогою об’єкту MPC типу *RBE*2 закріпленим за шістьма ступеням свободи.

Загальна маса датчиків що розташовані під час розрахунків становить 8,767% від загальної маси конструкції.

Дослідження проводились для перших 6 тонів коливань крила. Будемо мати 5 випадків:

– «Чисте» крило без датчиків (рис. 2);
– Два датчики на кінці крила розміщені біля кромок (рис. 3);
– Два датчики на кінці крила розміщені на однаковій відстані від осі жорсткості (рис. 4);
– Два датчики на кінці крила розміщені біля кромок + два датчики розміщенні на корені крила біля кромок (рис. 5);
– Два датчики на кінці крила розміщені на однаковій відстані від осі жорсткості + два датчики розміщенні на однаковій відстані від осі жорсткості (рис. 6).

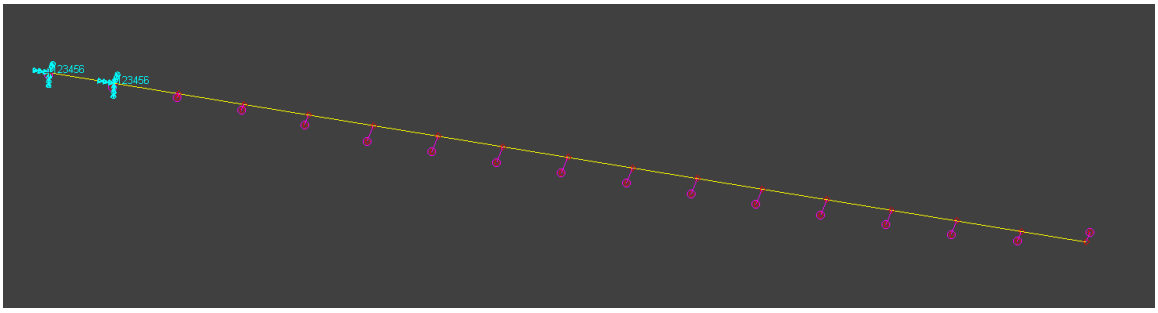

Рис. 2. *FEM* модель «чистого» крила без датчиків

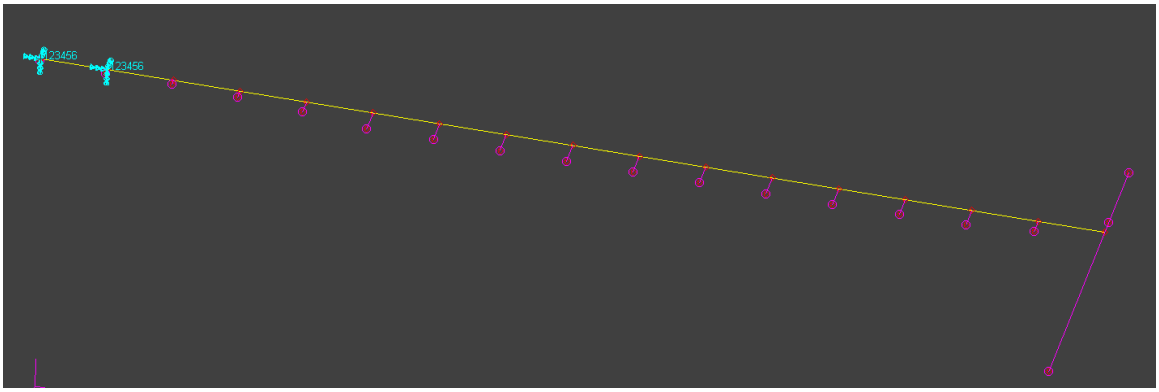

Рис. 3. *FEM* модель крила із двома датчиками на кінці крила, що розміщені біля кромок

Отримані результати представлені у вигляді двох таблиць. У таблицях порівнюються схожі за типом розміщення датчиків випадки, що були розраховані. У табл. 1 порівнюються результати розрахунків для випадків розміщення датчиків на крайніх кромках крила. У табл. 2 порівнюється розміщення датчиків на однаковій відстані від осі жорсткості.

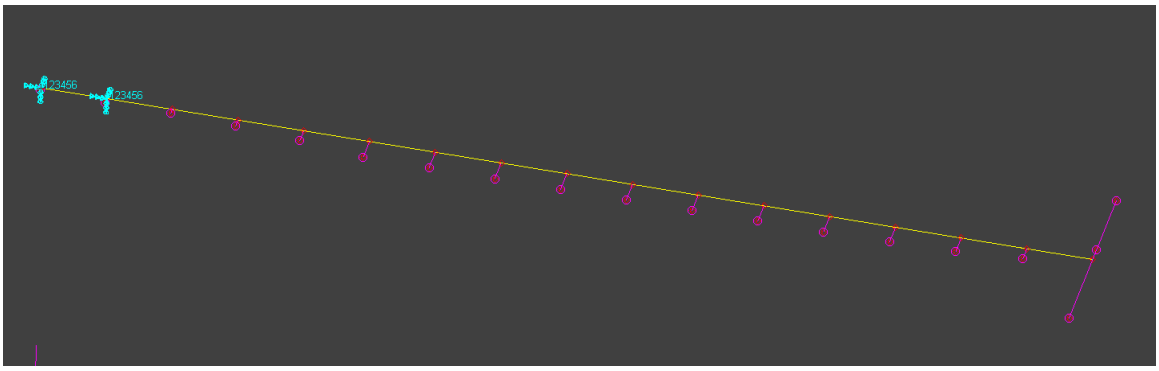

Рис. 4. *FEM* модель крила з двома датчиками на кінці крила, що розміщені на однаковій відстані від осі жорсткості

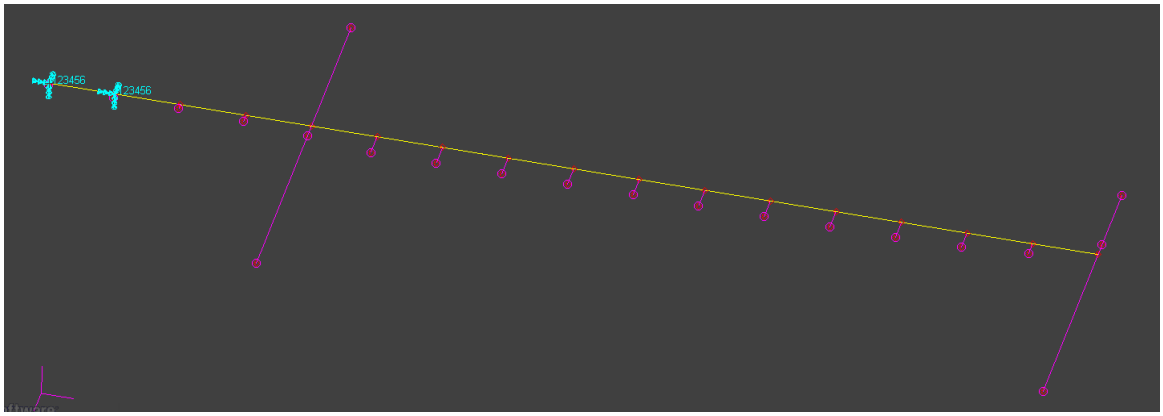

Рис. 5. *FEM* модель крила із двома датчиками на кінці крила, що розміщені біля кромок та двома датчиками розміщеними на корені крила біля кромок

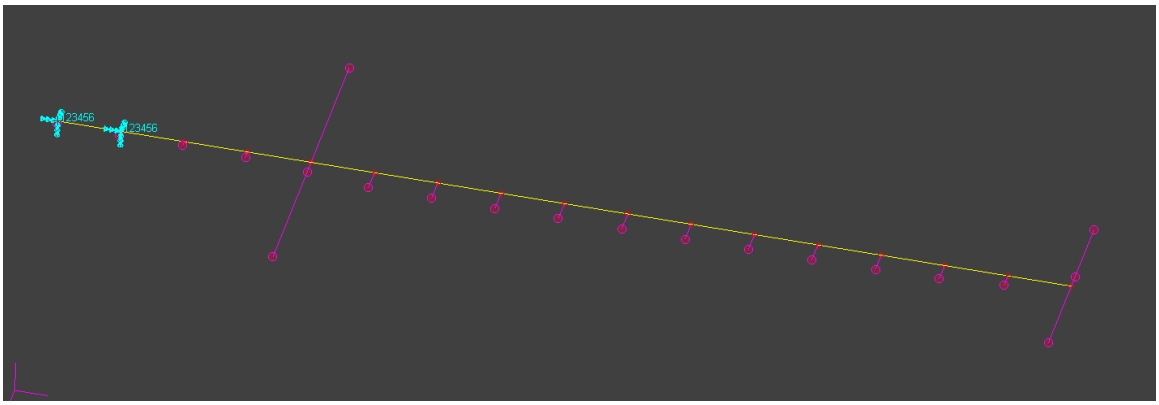

Рис. 6. *FEM* модель крила з двома датчиками на кінці крила розміщеними на однаковій відстані від осі жорсткості та двома датчиками розміщеними на корені крила на однаковій відстані від осі жорсткості крила

Форми та частоти, які не можливо порівняти із «чистим» крилом позначені, як НП – неможливо порівняти. Форми, що не були знайдені у певних варіантах, але присутні у перших шести тонах позначені НЗ – не знайдені.

***Таблиця* 1.**

Порівняння результатів «чистого» крила із випадками 2 та 4

Випадок 1		**Випадок 2**			**Випадок 4**		
Форма	Частота, Гц	Форма	Частота, Гц	Похибка, %	Форма	Частота, Гц	Похибка, %
КР	29,246	КР	29,241	0,0171	КР	29,244	0,007
ВЗ	274,36	ВЗ	184,91	32,603	ВЗ	219,16	20,120

Випадок 1		Випадок 2			Випадок 4		
Форма	Частота, Гц	Форма	Частота, Гц	Похибка, %	Форма	Частота, Гц	Похибка, %
НЗ	НЗ	ВЗ 1-го тону + КР	424,83	НП	ВЗ 2-го тону + КР (головне)	556,58	НП
ВЗ 2го тону	948,55	ВЗ 2-го тону + КР	637,71	НП	ВЗ 2-го тону (го-ловний) + КР	743,54	НП
ГЗ	1715,9	ГЗ	1114,5	35,048	ГЗ	1336,9	22,087
ВЗ 3го тону + КР	1719,4	ВЗ 3-го тону	1462,1	НП	ВЗ 3-го тону	1488,2	НП
КР 2х кінцевих секцій крила	2258,6	НЗ	НЗ	НП	НЗ	НЗ	НП

***Таблиця* 2.**

Порівняння результатів «чистого» крила із випадками 3 та 5

Випадок 1		Випадок 3			Випадок 5		
Форма	Частота, Гц	Форма	Частота, Гц	Похибка, %	Форма	Частота, Гц	Похибка, %
КР	29,246	КР	29,245	0,003	КР	29,246	0,000
ВЗ	274,36	ВЗ	187,3	31,732	ВЗ	220,65	19,576
ВЗ 2го тону	948,55	ВЗ 2го тону	611,14	35,571	ВЗ 2го тону	677,47	28,578
ГЗ	1715,9	ГЗ	1143	33,388	ГЗ	1356	20,974
ВЗ 3го тону + КР	1719,4	ВЗ 3го тону	1460	НП	ВЗ 3го тону	1482,9	НП
КР 2х кінцевих секцій крила	2258,6	КР 2х кінцевих секцій крила	711,86	68,482	КР 2х кі-нцевих секцій крила	955,81	57,681

Проаналізувавши отримані результати можна відзначити, що у всіх випадках різниця частот є більшою ніж на 10% відносного «чистого» крила, окрім першого тону кручення (КР).

Розглядаючи розміщення датчиків на кромках крила ми спостерігаємо поєднання тонів вертикального згину (ВЗ) першого та другого тону з КР, які відсутні у випадку «чистого» крила. Також у цьому випадку ми маємо «чистий» третій тон ВЗ, що для «чистого» крила поєднується з крученням. Частота горизонтального згину (ГЗ) зменшується порівняно із «чистого» крилом.

Якщо ж розглядати розміщення датчиків на рівній відстані від вісі жорсткості, то ми маємо єдину відмінність у формах коливань. У випадку розміщення датчиків на рівній відстані ми спостерігаємо ВЗ 3-го тону «чистий», а не як у випадку «чистого» крила ВЗ 3го тону поєднаний з КР. Частота ГЗ також зменшується у порівнянні із «чистим» крилом.

Отримані результати вказують на те, що для надлегких конструкцій встановлення додаткових датчиків масою менше ніж 10% необхідно враховувати, оскільки відхилення частоти тонів коливань відрізняється більше ніж на 5% порівняно з «чистим» крилом. Також відбувається зміна послідовності мод коливань в залежності від розміщених датчиків на крилу.

Висновок

У даній роботі було проведено дослідження впливу маси датчиків на модальні характеристики конструкції (частота та форма коливань) під час наземних частотних випробувань. Для цього було розглянуто вплив додаткової маси від датчиків на власні частоти та форми коливань конструкції на надлегкому крилі. Крило мало трапецевину форму та мало закріплення. Маса датчиків становила 8,767% від загальної маси конструкції. Дослідження проводились у програмному забезпеченні *MSC Patran*/*Nastran*. Було розглянуто 5 різних випадків: один випадок без датчиків та 4 із різним розміщенням датчиків на крилу. Отримані результати вказують на те, що для надлегких конструкцій встановлення додаткових датчиків масою менше ніж 10% необхідно враховувати, оскільки відхилення частоти тонів коливань відрізняється більше ніж на 5% порівняно з «чистим» крилом. Також відбувається зміна послідовності мод коливань у залежності від розміщених датчиків на крилу.

Отже, отримані результати мають важливе практичне значення, так як вони демонструють необхідність врахування маси акселерометрів, що розташовуються під час НЧВ для забезпечення правильності отриманих модальних характеристик ЛА.

У подальшому необхідно провести експериментальні дослідження для перевірки числових розрахунків, що проводились за допомогою *FEM* моделі. Та можна дійти висновку, що наразі необхідна розробка методики

проведення наземних частотних випробувань на легких конструкціях для отримання реальних модальних характеристик конструкції.

Таким чином, проведене дослідження чітко демонструє, що для надлегких крил навіть невелика маса акселерометрів (менше 10% маси крила) може суттєво спотворити результати НЧВ. Це підкреслює необхідність врахування цього фактору під час отримання модальних моделей ЛА.

Список використаних літератури

1. *R. L. Bisplinghoff*, *H. Ashley*, and *R. L. Halfman*, Aeroelasticity. Mineola, NY: Dover publications, INC., 1983.
2. *J. R. Wright* and *J. E. Cooper*, Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads. Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd (Aerospace series), 2007.
3. *D. H. Hodges* and *G. A. Pierce*, Introduction to structural dynamics and aeroelasticity (2d). New York: Cambridge University Press, 2011.
4. *H. Djojodihardjo*, Introduction to Aeroelasticity With Case-Studies. Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2023.
5. European Union Aviation Safety Agency [EASA], ‘Certification Specifications and Acceptable Means of Compliance for Large Aeroplanes’, 1 2023. [Online]. Available: https://www.easa.europa.eu/en/document-library/certification-specifications/cs-25-amendment-28. [Accessed: Apr. 28, 2025]
6. *O. Døssing* and *Brüel&Kjær*, Structural Testing Part 2. Modal Analysis and Simulation. Denmark, 1988. [Online]. Available: https://www.bksv.com/media/doc/br0507.pdf. [Accessed: May 6, 2025].
7. *Brüel* & *Kjær*, Experimental Modal Analysis. 2003. [Online]. Available: https://hnutest.hnu.edu.cn/pdf/20150826110815181.pdf. [Accessed: May 6, 2025].
8. Measuring Vibration with Accelerometers. [Online serial]. Available: https://www.ni.com/en/shop/data-acquisition/sensor-fundamentals/measuring-vibration-with-accelerometers.html. [Accessed: Apr. 28, 2025].
9. *L. A. Zavorotynskyi* and *D. I. Konotop*, "Challenges during ground vibration testing of flexible light aircraft," in XVI International Student Conference “INTELLIGENCE. INTEGRATION. RELIABILITY.”, Kyiv, Ukraine: National Technical University of Ukraine ‘Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute’, 2024, pp. 70–71. [Online]. Available: https://ki.kpi.ua/wp-content/uploads/2024/12/Book%20of%20theses%20IRR%202024.pdf. [Accessed: Apr. 28, 2025].
10. *N. H. Baharin* and *R. A. Rahman*, “Effect of accelerometer mass on thin plate vibration,” Jurnal Mekanikal, (No.29), pp. 100–111, 2009.