УДК 629.7.05

*DOI*:https://doi.org/10.20535/0203-3771492025334111

**О. М. Бондаренко**[1], *к.т.н.*, **І. Ю. Іщенко**[2], **Є. В. Сосуляка**[3], **Ю. Ю. Юр'єв**[4]

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ГІРОСКОПУ ІЗ НАПІВСФЕРИЧНИМ КВАРЦОВИМ РЕЗОНАТОРОМ

**Ua** Проведено моделювання руху чутливого елементу твердотільного хвильового гіроскопу із напівсферичним кварцовим резонатором. Для моделювання використано скорочені рівняння руху резонатора гіроскопу. Зазначені рівняння враховують технологічні похибки виготовлення резонатора. Математичну модель гіроскопу доповнено моделлю електростатичної сили із суттєвою нелінійністю для підтримання вільних коливань резонатору. Побудовано імітаційну модель для підбору конструктивних та електричних параметрів гіроскопу. Результати розрахунків підтверджують можливість побудови твердотільного хвильового гіроскопу із напівсферичним резонатором в режимі датчика кута із електростатичною системою генерації коливань.

**En** The motion of the sensitive element of a solid-state wave gyroscope with a hemispherical quartz resonator was simulated. Mathematical models of the main structural components of the gyroscope were compiled: a capacitive registration system, an electrostatic perturbation system, a system for supporting resonator oscillations and a system for measuring the angular position of the wave, and a system for compensating the quadrature component of oscillations. A mathematical model of an electrostatic system with significant nonlinearity is proposed to maintain free oscillations of the resonator. Calculations confirm the possibility of constructing a solid-state wave gyroscope with a hemispherical resonator and an electrostatic perturbation system in the angle sensor mode.

## Вступ

Твердотільні хвильові гіроскопи (ТХГ) є перспективними приладами, що підтверджується зацікавленістю в їх дослідженнях закордонних та вітчизняних розробників. У роботі [1] розробниками представлено докладні математичні моделі складових цифрового контуру керування ТХГ в інтегруючому режимі (режимі датчика кута). Моделі включають рівняння руху чутливого елементу, вирази для перерозподілу вимірюваних сигналів на електродах системи реєстрації в необхідні зусилля на електродах системи генерації коливань, а також експериментальні результати, які підтвер-

1 *ДП СПБ «Аресенал»*
2 *ДП СПБ «Аресенал»*
3 *ДП СПБ «Аресенал»*
4 *ДП СПБ «Аресенал»*

джують наведені математичні вирази. Дослідники зазначають можливість вимірювання таким датчиком кутової швидкості у діапазоні понад 360 град/с із похибкою менше, ніж 40 *ppm* від верхньої межі вимірювання, однак саме для підтвердження такої похибки не надається ні експериментами, ні розрахунками. У роботі [2] представлено математичні моделі роботи ТХГ у режимі силової компенсації (датчика кутової швидкості) та запропонована їх реалізація в цифровому контурі керування. Визначена за результатами проведеного розробниками експерименту похибка вимірювань ТХГ в лабораторних умовах склала не більше 0,5 град/год. Однак в роботі не розкрито деталі конструкції і фізичний принцип силової компенсації, який би дозволяв створити необхідні зусилля для компенсації прецесії хвилі в чутливому елементі. В роботі [3] розглянуто мікромеханічний гіроскоп із напівсферичним цільнотянутим кремнієвим резонатором. Розробниками зазначено про можливість досягнення похибки вимірювання таким гіроскопом в лабораторних умовах меншої за 0,1 град/год. Всі розробники ТХГ у своїх розрахунках та експериментах використовують в якості базової узагальнену математичну модель, запропоновану у роботі [4]. В цій роботі описано скорочені та повні рівняння руху чутливого елементу в трьох основних режимах роботи – силової компенсації, режимі датчика кутової швидкості та режимі вільного гіроскопу. У роботах [5, 6] наведено результати практичної реалізації на виробництві серійних зразків ТХГ та їх використання у складі різного типу інерціальних навігаційних систем, однак не розкрито деталі математичних моделей, на базі яких були побудовані ці серійні зразки. Основною метою цього дослідження є створення імітаційної математичної моделі для налаштування та оцінки можливостей побудови ТХГ із кварцовим напівсферичним резонатором у режимі датчика кута, яка пов'яже конструктивні та електричні параметри приладу в умовах виготовлення із його необхідними технічними характеристиками.

**Постановка задачі**

Для проведення моделювання встановимо наступні вхідні положення. Вхідною величиною має бути вимірювана кутова швидкість обертання основи гіроскопу, вихідна величина цифрова – число із плаваючою комою, пропорційне приросту кута основи в інерціальному просторі за час інтегрування вимірюваної кутової швидкості. В якості базових рівнянь для моделювання беруться рівняння узагальненої математичної моделі для коріолісових гіроскопів, представленої в роботі [4]. Імітаційна модель має включати всі необхідні складові контуру керування гіроскопу, які дозволять налаштувати ємнісний контур вимірювання, електростатичний контур генерації та підтримки вільних коливань чутливого елементу гіроскопу, контур компенсації квадратурної складової вихідного сигналу, ПІД-

регулятори синхронного та квадратурного контуру керування, визначити інтеграл вимірюваної кутової швидкості, а також оцінити вплив на роботу гіроскопу технологічних похибок виготовлення резонатору, а саме різночастотності та різнодобротності резонатору. Математичні моделі потрібно доповнити рівняннями, які пов'яжуть параметри цифрового контуру керування коливаннями резонатора із конструктивним та електричними параметри приладу.

**Опис математичної моделі ТХГ**

Структурно ТХГ можна розділити (рис. 1) на резонатор (*Resonator*), електронну плату (PCB) та мікропроцесорний обчислювач (*FPGA*) [3]. На відміну від структурної схеми, запропонованої авторами [3], на схемі (рис. 1) розділено підсилювачі системи генерації коливань *Damping compensation* на чотири (*Da*1, *Da*2, *Da*3, *Da*4), щоб мати можливість незалежно керувати за чотирма ступенями вільності, які відповідають переміщенням по чотирьом електродами, позначеним 2, 3, 4, 5. Також на відміну від схеми авторів [3], в цифровому контурі генерації коливань NCO формується не сигнал для демодуляції третьої гармоніки, а сигнал поділеної на 2 частоти власних коливань резонатору для формування необхідної модуляції сигналу датчика електростатичної сили.

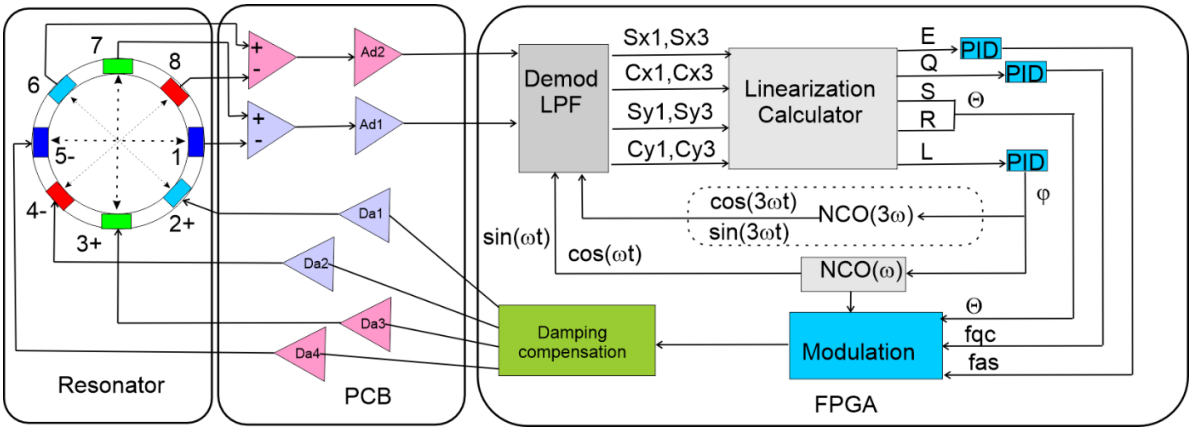



Рис. 1. Структурна схема односторонньої системи керування ТХГ

Математична модель резонатора включає систему рівнянь (1), представлену в роботі [4]:

$$\ddot{x} - 2k\Omega\dot{y} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)\left(\dot{x}\cos 2\theta_\tau + \dot{y}\sin 2\theta_\tau\right) - \\ -\omega\Delta\omega\left(x\cos 2\Theta_\omega + y\sin 2\Theta_\omega\right) = f_x\ ; \qquad (1)$$

$$\ddot{y} + 2k\Omega\dot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{y} - \Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)\left(-\dot{x}\sin 2\theta_\tau + \dot{y}\cos 2\theta_\tau\right) +$$

$$+\omega\Delta\omega\left(-x\sin 2\Theta_\omega + y\cos 2\Theta_\omega\right) = f_x \ .$$

де $x$ – переміщення по вісі пучності (рис. 2), $y$ – переміщення по вісі вузлів, точка та дві точки над координатами $x$ та $y$ – перша та друга похідна по часу від переміщень, $\Omega$ - проекція вхідної кутової швидкості на вісь чутливості гіроскопу, $\tau$ - декремент затухання коливань резонатору, $\omega$ - кругова частота власних коливань резонатору, $\Delta(1/\tau)$ та $\Delta\omega$ – різнодобротність та різночастотність коливань по осям $x$ та $y$, $\theta_\tau$ та $\theta_\omega$ – кути різнодобротності та різночастотності, $f_x$ та $f_y$ – сили генерації коливань по осям $x$ та $y$.

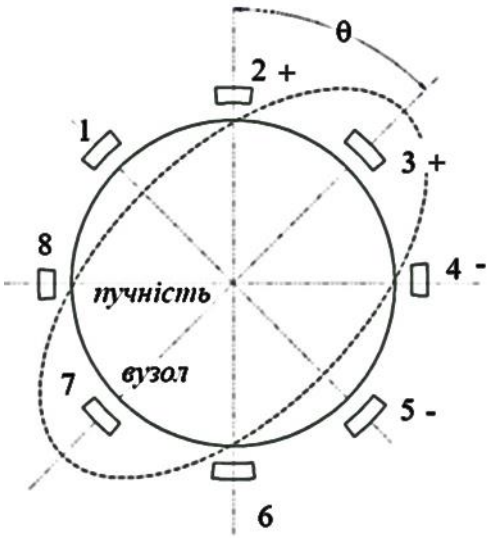
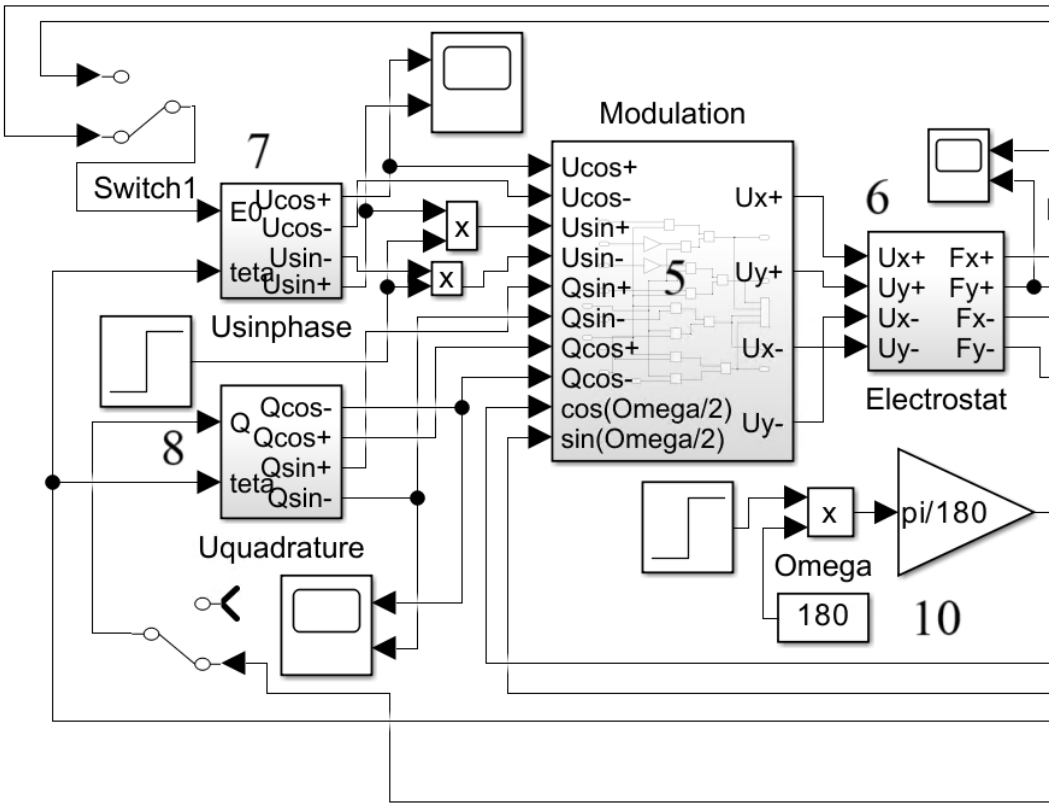



Рис. 2. Схема розташування електродів навколо резонатору

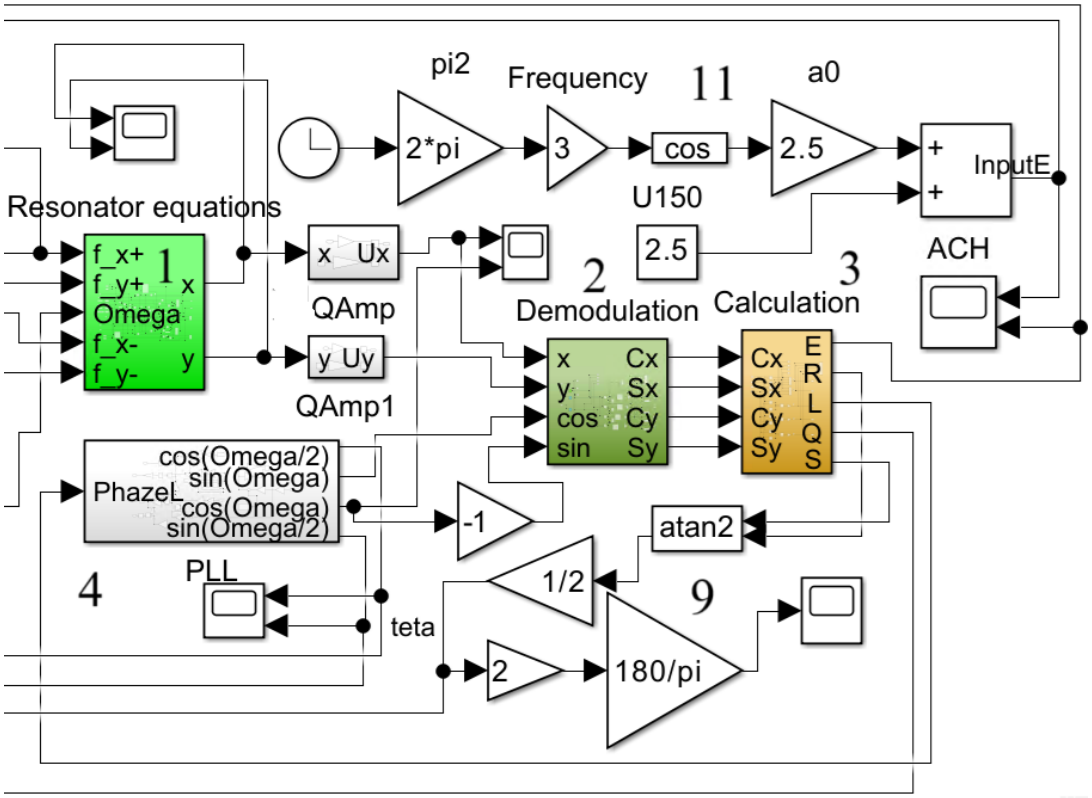
На відміну від представлених у [4] рівнянь, у виразах (1) знехтувано величини другого порядку малості, а саме вплив кутового прискорення, відцентрової сили та сили дебалансу мас на коливання резонатору.

Амплітуда коливань резонатору вимірюється попарно на двох електродах із протилежною фазою коливань (6 та 8, 7 та 1 на рис. 1), а результати вимірювань віднімаються на попередньому диференційному підсилювачі (позначений $\pm$ на рис. 1). Саме за рахунок цього звільняються для подачі сил збурення всі чотири діаметри розташування електродів (рис. 2): електроди реєстрації 6, 7, 8, 1 та збурення 2, 3, 4, 5 будуть знаходитись на одних і тих же діаметрах, навпроти один до одного.

Для відбору та перевірки математичних виразів, які описують складові контуру керування, необхідна імітаційна модель гіроскопу (рис. 3). Така модель може видавати результати розрахунків в машинному часі.




*а*)




*б*)

Рис. 3. Чотирьохпровідна імітаційна модель ТХГ

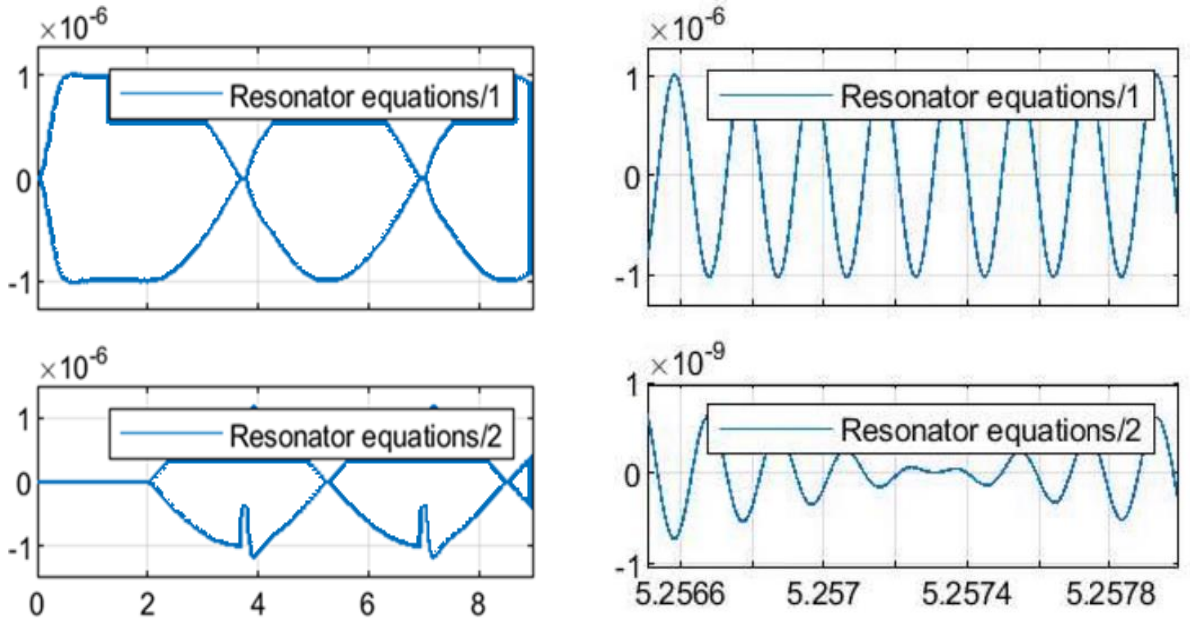
На рис. 3, ***а*** представлений початок імітаційної моделі, на рис. 3, ***б*** - її продовження. Імітаційна модель деталізує та доповнює складові структурної схеми рис. 1. Блок *Modulation* 5 виступає в якості суматора синфазних та протифазних складових сигналу зворотного зв'язку по кожному електроду, тоді як попередній розподіл синфазної та протифазної складової по електродам здійснюється в блоках 7 та 8. Для модуляції сигналу на електродах системи генерації, блок *Modulation* бере опорні сигнали поділеної частоти sin(ωt/2) та cos(ωt/2) із модуля 4 ФАПЧ (*PLL*). Таким чином, функції блоків Damping compensation та Modulation зі структурної схеми рис. 1 конкретизовані в імітаційній моделі у блоках 5, 7 та 8. Взаємодія напруги на електродах системи генерації коливань із резонатором здійснюється через блок 6 *Electrostat*, який перетворює напругу в електростатичну силу $F_x$ та $F_y$ по синфазному та «+» та протифазному «–» електроду. чі $\pm$ зі структурної схеми рис. 1, в імітаційній моделі представлено підсилювачами заряду *QAmp*. Вони перетворюють переміщення на електродах ємнісної системи реєстрації до напруги одиниць вольт, придатної для оцифрування на АЦП (елементи *Ad*1 і *Ad*2 зі схеми рис. 1). У моделі підсилювача заряду передбачено джерело його реального шуму. Блоки *Demodulation* 2 та *Calculation* 3 імітаційної моделі виконують функції блоків *Demod LPF* та *Linerization calculator* структурної схеми. Для синхронного детектування в блоці 2 сигналів із електродів реєстрації, використовуються сигнали опорної частоти $\sin(\omega t)$та $\cos(\omega t)$ із ФАПЧ 4 (*PLL*). *PID*-регулятори синфазної складової *E* демодульованого сигналу, квадратури *Q* та фази *L* в імітаційній моделі розміщено е середині блоків 7, 8 та 4 відповідно. Блок *NCO* зі структурної схеми рис. 1 в імітаційній моделі рис. 3 позначено, як 4 *PLL*. Визначення поточного кута Θ хвилі в резонаторі в імітаційній моделі конкретизовано у системі 9, за допомогою функції *atan*2.

Задавання переносної кутової швидкості руху основи ТХГ Ω реалізовано у системі 10. Система 11 призначена для задавання вимушених коливань у разі визначення коефіцієнтів ПІД-регулятору контуру керування шляхом бажаних амплітудно-частотних характеристик. На час синтезу коефіцієнтів зворотного зв'язку контур керування розмикається ключем *Switch* 1.У ключових точках імітаційної моделі також розміщені контрольні ключі та осцилографи.

Результати моделювання показують, що крива (рис. 4), яка модулює амплітуду коливань резонатора при обертанні гіроскопу в інерціальному просторі, буде переходити через нульове значення, при цьому досить швидко змінюючи фазу коливань на 180 град. Це має порушувати баланс фаз у контурі керування. Однак, цей перехід не впливає на вихідний сигнал, представлений на рис. 5

Рівномірна зміна в часі поточного значення кута хвилі у резонаторі (рис. 5) від мінус 180 град до плюс 180 град. під дією вхідної кутової швидкості підтверджує роботоздатність імітаційної моделі та правильність налаштування контурів керування.

Стрибок вихідної характеристики гіроскопу, який спостерігається на рис. 5, викликаний переходом через нескінченність функції *atan*2(θ) для кута 180 град.




***а*)** ***б*)**

Рис. 4. Графік амплітудної модуляції коливань резонатору

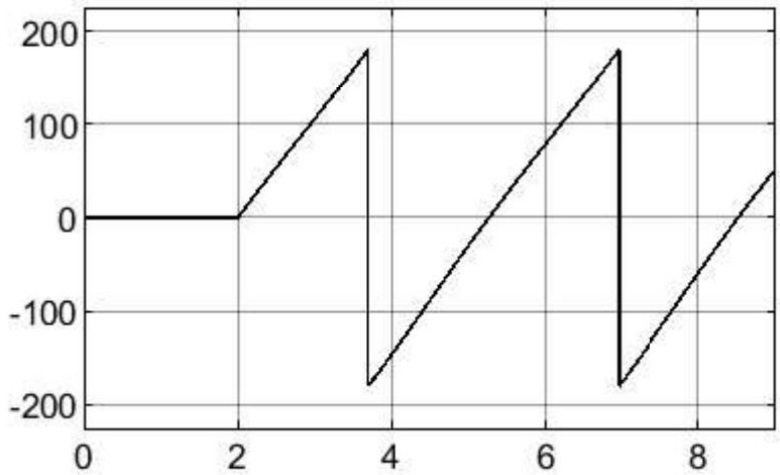


Рис. 5. Поточне значення кута хвилі в резонатор

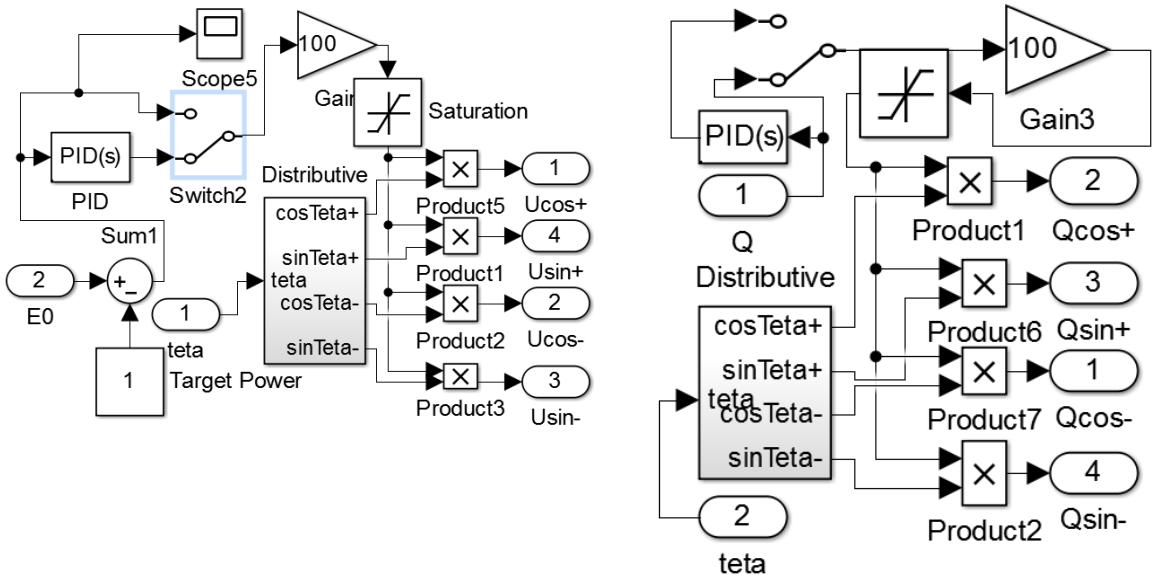
Детальніше розглянемо модель електростатичного датчика сили, який має нелінійну залежність сили від прикладеної електричної напруги.

**Датчик сили**

Вираз (2) для електростатичної сили системи генерації в разі відсутності постійного зміщення напруги матиме вигляд:

$$f_x = \frac{C}{2\cdot\delta 0}\cdot\left[U_{x1}\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{f1}{2}\cdot t\right)\right]^2 = \frac{C}{2\cdot\delta 0}U_{x1}^2\left(\frac{1+\cos\left(2\cdot\pi\cdot f1\cdot t\right)}{2}\right). \qquad (2)$$

Напруга модуляції $U_{x1}$ для кожного електроду формується окремо, як для синфазної складової напруги (рис. 6, ***а***), так і квадратурної Q (рис. 6, ***б***). При цьому враховується, що квадрат кривої модуляції, як і квадрат несучої, також буде математично збільшувати вдвічі частоту обертання хвилі.




***а***) ***б***)

Рис. 6. Розподіл напруги кривої модуляції по електродах

У блоці синфазної складової для підтримки постійної амплітуди коливань передбачено постійний зсув *Target Power*, тоді як в блоці квадратурної складової зсув відсутній для мінімізації цієї складової. Блок *Distributive* (рис. 7) перед приведенням до квадрату напруги модуляції, виконує підготовку відповідних тригонометричних функцій.

Для електродів пучності «2+» та «4-» (рис. 2) формуються сигнали косинуса половини кута положення хвилі Θ cosTeta+ та синуса половини кута Θ cosTeta-. Для електродів вузлів «3+» та «5-» формуються сигнали sinTeta+ та sinTeta- додаванням та відніманням косинуса та синуса половини кута хвилі із подальшим зменшенням шляхом поділення на корень із 2.

Зміна в часі сигналів на електродах представлено на рис. 8. На верхньому графіку представлено сигнал напруги виходу із електродів системи реєстрації в пучності 6, 8 (синій) та вузлах 7 і 9 (червоний) (рис. 2). Нормо-

вані сигнали електростатичної сили на електродах системи генерації в пучності 2+ (червоний) та 4 – (синій) представлені на середньому графіку, у вузлах 3+ (червоний) та 5 – (синій) – на нижньому графіку.

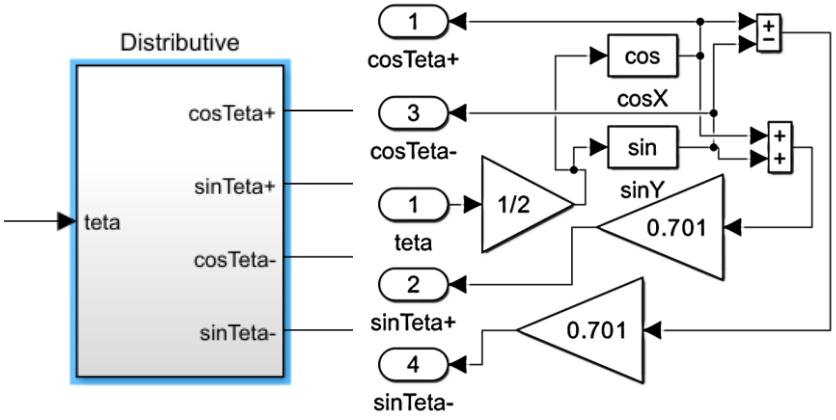



Рис. 7. Розподілу квадрату напруги модуляції

Рис. 8. Розподіл сигналів на електродах резонатора

Особливістю сигналів є те, що в той час, як на електроді пучності 2+ сигнал сили максимальний (середній рисунок), на протифазному електроді пучності 4- сигнал сили нульовий, а у вузлі 3+ та 5- діють однакові за модулем, та протилежні за знаком сили, які зупиняють рух у вузлі, не зважаючи на те, що квадрат кривої модуляції, як квадрат тригонометричної функції, ніколи не буде мати від'ємні значення. Це пояснює, чому на модулятор (рис. 3, ***а***) надходять по 4 напруги із синфазної та квадратурної складової. В блоці модулятора (рис.9) сигнали напруги заповнюються опорним сигналом sin(ωt/2) та cos(ωt/2) і додаються у відповідності до системи рівнянь, представленої у [1].

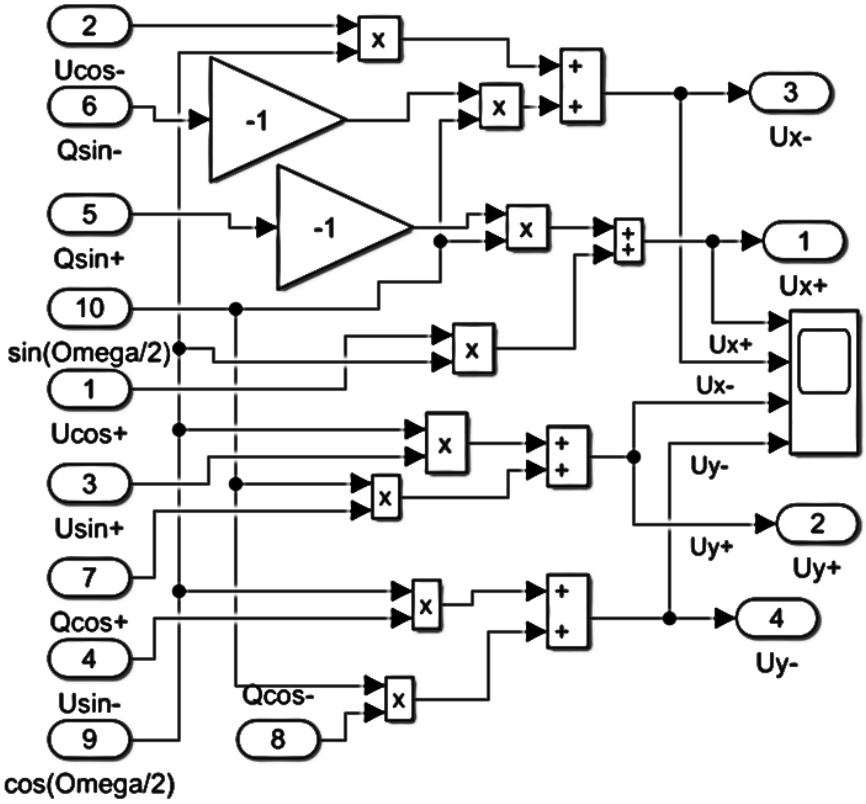



Рис. 9. Схема підблоку *Modulator*

І вже на електроди системи генерації подається об'єднана напруга, яка підтримує синфазні коливання із постійною амплітудою, та придушує квадратурні коливання.

В блоці *Electrostat* (рис. 10), який стоїть після всіх тригонометричних перетворень та модуляцій, береться квадрат кожної із результуючих напруг та її добуток із ємністю ($5*10^{-12}$пФ), поділяється результат на подвоєний зазор ($20*10^{-6}$ м) між електродами в електростатичній системі збурення.

Таким чином, одержуються чотири сили Fx+, Fx-, Fy+, Fy- на чотири електроди системи генерації 2, 3, 4, 5 (рис. 2).

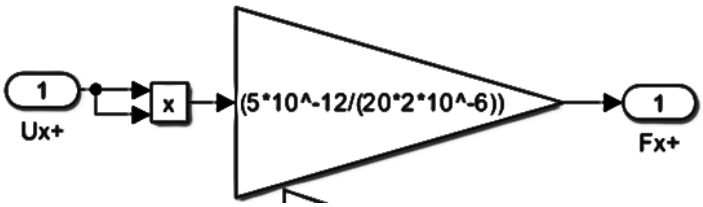



Рис. 10. Схеми каналу Ux+ підблоку датчика сили *Electrostat*

**Результати моделювання**

Для оцінки були побудовані графіки поточних значень напруги, необхідних для збурення коливань (рис.11). Пікові напруження будуть під час включення гіроскопу для переходу до сталих коливань.

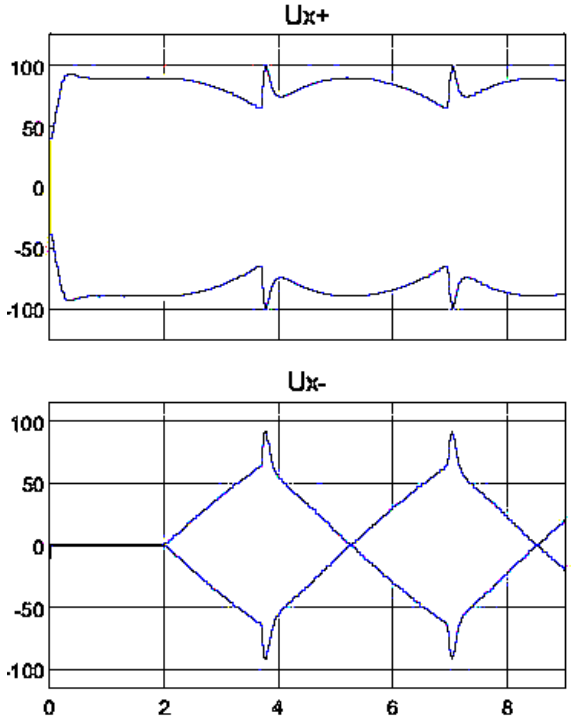



Рис. 11. Поточне значення модуляції напруги на обкладках конденсатору

Також великими будуть значення напруги під час коротких фазових переходів при зриві коливань, викликаних переходом через нуль (рис. 4, ***б***) кривої модуляції коливань. Попередня оцінка показує, що в ідеальному випадку при добротності коливань $10^6$ та зазорах між резонатором і електродами до 20 мкм, необхідна напруга живлення приводів складе до 100 В. Однак при меншій добротності коливань або похибці у підтриманні резонансної частоти, необхідна напруга живлення може сягнути 400 В.

Дослідження впливу технологічних похибок виготовлення, зокрема неоднорідності товщини стінки та діаметру резонатора показало, що різно-

добротність не впливає на стійкість коливань, а питання впливу різночастотності потребує додаткового опрацювання. Оцінка коефіцієнтів ПІД-регулятора синфазного та квадратурного контурів керування показало, що співідношення між пропорційним та інтегральним коефіцієнтами складає 1:10, а ПІД-регулятор ФАПЧ навпаки, має таке співвідношення 1:0,01. Рівень випадкових шумів підсилювача та випадкового дрейфу напруги підсилювача показав можливість вимірювання в динамічному діапазоні $10^7$, тобто при діапазоні вимірювання 300 град/год порогова чутливість складе 0,1 град/год.

**Висновок**

Проведене напівнатурне моделювання ТХГ із кварцовим напівсферичним резонатором дозволило доповнити математичні моделі авторів [1, 2, 3] моделлю нелінійного датчика сили, що підтвердило актуальність проведення такого моделювання перед виготовленням гіроскопу. Лінійна зміна вихідного сигналу моделі гіроскопу (рис. 5) при рівномірному обертанні показала, що навіть при різких змінах напруги, викликаних флуктуаціями фази (рис. 10), можливо створення твердотільного гіроскопу на базі напівсферичного резонатору. Електростатичної сили при досяжних конструктивних (зазор між резонатором та електродами до 20 мкм) та електричних параметрах (напругою на електродах системи генерації до 400 В) достатньо для забезпечення генерації коливань. Із-за нелінійності датчика сили, імітаційна модель показала суттєвий вплив різночастотності на стійкість системи керування коливаннями резонатору. Розроблена імітаційна модель підтверджує можливість побудови твердотільного хвильового гіроскопу із кварцовим напівсферичним резонатором.

**Список використаної літератури**

1. Wanliang Zhao. The control algorithm of whole angle mode for HRG based on the vector composition // Wanliang Zhao, Yuxiang Cheng, Shaoliang Li and Lijun Song. – EURASIP Journal оп Wireless Communications and Networking. – 2021. - 2021:32. – 10 p.
2. Wang Xu. Force to Rebalance Control of HRG and Suppression of Its Errors on the Basis of FPGA // Xu Wang , Wenqi Wu, Bing Luo and all. – MDPI Sensors. – 2011/11-– P. 11761 – 11773.
3. Jiangkun Sun. 0.79 ppm scale-factor nonlinearity whole-angle microshell gyroscope realized by real-time calibration of capacitive displacement detection / Jiangkun Sun , Sheng Yu, Yongmeng Zhang and all // Microsystems & Nanoengineering. – published onlain 13.10.2021. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://www.nature.com/articles/s41378-021-00306-6.

4. Lynch D. D. Coriolis Vibratory Gyros. - Symposium Gyro Technology. Stuttgart. 1998, p.1-15.
5. Fabrice Delhaye. HRG by SAFRAN - The game-changing technology. - ResearchGate. – 2018. – 4 p. - [Електронний ресурс] Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/324951579.
6. О. М. Бондаренко. Особливості розроблення твердотільного хвильового гіроскопу / О. М. Бондаренко, Ю. О. Яценко, В. А. Коваленко – Механіка гіроскопічних систем. – 2022 - № 44 - С.61-72.