

## ПРО НАПРУЖЕННЯ, ВИКЛИКАНІ ХВИЛЯМИ РЕЛЕЯ ПРИ СПІВУДАРІ ПРУЖНИХ ТІЛ

### Вступ

При співударі пружних тіл виникають різного роду коливальні ефекти, які згодом, розповсюджуючись в тілі, можуть прийняти форму стаціонарних коливань, до яких, зокрема, належать хвилі Релея, хвилі Лява тощо.

Дослідження процесу виникнення хвиль Релея на підставі ідеї, запропонованої М. О. Кільчевським, було проведено в роботі [1]. Вплив хвиль Релея на процес удару та його основні характеристики, а також (зворотна задача) вплив фізичних і геометричних характеристик взаємодіючих тіл на хвилі Релея, що при цій взаємодії виникають, розглянуті в роботах [ 6, 9, 10 ].

Аналітичні вирази контактного тиску  $p(t)$ , сили динамічної взаємодії  $P(t)$ , радіуса поверхні контакту  $\rho(t)$  знайдені як функції параметрів, що визначають амплітуди і частоти поверхневих хвиль.

### Постановка задачі

Метою роботи є дослідження впливу нелокальних динамічних ефектів (зокрема, хвиль Релея) на поле напружень в тілах, що співударяються.

Для дослідження напруженого стану двох тіл, в яких при співударі виникли поверхневі хвилі, будемо вважати, що поле напружень в цих тілах є результатом накладання двох полів. Перше поле – поле контактних напружень, пов'язане з умовами контакту. Поверхневі хвилі впливають на це поле. Друге поле створюють виключно поверхневі хвилі.

Для визначення контактних напружень скористаємось теорією ньютонівського потенціалу, як показано в [3].

### Дослідження напруженого стану контактуючих тіл

Розглянемо випадок контактної взаємодії пружних тіл, обмежених поверхнями обертання. Тоді вирази компонент напруження для осесиметричної динамічної контактної задачі приймають вигляд, аналогічний тому, який був знайдений О. М. Динником. Різниця полягає

лише в тому, що сила динамічної взаємодії  $P(t)$ , яка є співмножником у виразах

$$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$$

в даному разі залежить від параметрів  $\varepsilon$  і  $\omega$ . В зв'язку з цим контактні складові напруження при наявності впливу хвиль Релея незначно зменшуються.

Напруження, викликані поверхневими хвилями, знаходимо у випадку, коли навантаження не перевищує границі пружності і компоненти напруження задовольняють закону Гука. Розв'язки рівнянь Ламе для даного випадку мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned} u_{rn} &= -\left(M_n \kappa_n e^{-\xi_n z} + N_n \eta_n e^{-\eta_n z}\right) I_1(\alpha_n r) \cdot \cos \omega_n t, \\ u_{zn} &= -\left(M_n \xi_n e^{-\xi_n z} + N_n \kappa_n e^{-\eta_n z}\right) I_0(\alpha_n r) \cdot \cos \omega_n t \end{aligned} \quad (1)$$

тут  $M_n, N_n$  – амплітуди хвиль розширення і зсуву;

$\omega, \alpha, \xi, \eta$  – параметри, що характеризують частоту коливань і швидкість їх згасання вздовж координат  $OZ_i$  ( $i=1, 2$ ), які напрямлені вздовж внутрішніх нормалей до поверхонь недеформованих тіл в точці їх контакту.

Беручи до уваги значення  $M_n, N_n, \xi_n, \eta_n, \alpha_n, \omega_n$  [1], а також визначаючи загальні розв'язки рівнянь Ламе, як

$$u_r = \sum_{n=2}^{\infty} u_{rn}, u_z = \sum_{n=2}^{\infty} u_{zn},$$

Одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{A}{f} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ 2,5 \left[ \frac{\lambda}{\gamma} (\gamma^2 - 1) + 2\mu\gamma \right] e^{-0,52nf\gamma z} - 3,6 \mu e^{-0,24nfz} \right\} \times \\ &\quad \times I_0(0,52nfr) \cos(0,47n c_2 f t), \\ \sigma_r &= \frac{A}{f} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \left[ 2,5 \left( \lambda\gamma - \frac{\lambda + 2\mu}{\gamma} \right) \cdot e^{-0,52nf\gamma z} + 3,6 \mu e^{-0,24nfz} \right] \times \right. \\ &\quad \times I_0(0,52nfr) + 2\mu \left( \frac{2,5}{\gamma} e^{-0,52nf\gamma z} - 1,8 e^{-0,24nfz} \right) \times \\ &\quad \left. \times \frac{I_1(0,52nfr)}{0,52nfr} \right\} \cos(0,47n c_2 f t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{A}{f} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ 2,5\lambda \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) e^{-0,52nf\gamma z} I_0(0,52nfr) - \right. \\ \left. - 2\mu \left( \frac{2,5}{\gamma} e^{-0,52nf\gamma z} - 1,8 e^{-0,52nfz} \right) \frac{I_1(0,52nfr)}{0,52nfr} \right\} \cos(0,47nc_2ft) \quad (3)$$

$$\tau_{rz} = \frac{4,8A\mu}{f} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left( e^{-0,52nf\gamma z} - e^{-0,24nfz} \right) \times \\ \times I_1(0,52nfr) \cdot \cos(0,47nf c_2 t)$$

де

$$\gamma = \frac{\sqrt{c_1^2 - 0,8c_2^2}}{c_1}; f = \frac{\pi v_0^{\frac{1}{5}}}{c_2 m^{\frac{2}{5}} k^{\frac{3}{5}}}; k = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)\sqrt{A}};$$

$c_1$  і  $c_2$  – швидкості розповсюдження хвиль розширення і зсуву,  
 $v_0$  – відносна швидкість зближення тіл,  $m$  – зведена маса,  
 $\lambda, \mu$  – коефіцієнти Ляме,  $\gamma$  – густина,  
 $\vartheta_1$  і  $\vartheta_2$  – визначаються через коефіцієнти Ляме:

$$\vartheta_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}; \quad \vartheta_2 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}.$$

Для якісної оцінки спростимо вирази (2). Розглянемо найнижчу форму коливаль (n=2), що виникають в тілах, для яких коефіцієнт Пуассона

$$\nu = 0,25.$$

Простежимо закон зміни компонент напруження лише на осі симетрії тіл. Для зручності використаємо безрозмірні параметри. Амплітуди компонент напруження будемо характеризувати відношеннями

$$\frac{\sigma_r}{(\sigma_r)_0} = r_1, \quad \frac{\sigma_z}{(\sigma_r)_0} = r_2, \quad \frac{\sigma_{\theta}}{(\sigma_r)_0} = r_3.$$

Залежність цих відношень від  $\frac{z}{\Lambda}$  зображена на рис. 1. Криві I, II, III. Тут  $\Lambda$  – довжина хвилі,  $(\sigma_r)_0$  – значення амплітуди  $\sigma_r$  на поверхні.

Всі дотичні складові напруження –  $\tau_{rz}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$  дорівнюють нулю. Для ілюстрації характеру зміни дотичних напружень (рис. 1, крива IV) знаходимо [3]

$$T_{rz} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_r).$$

$$T_{rz} = \frac{A\mu}{f} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ (5,05 e^{-44nfr} - 3,64 e^{-0,24nfr}) \cdot I_0(0,52nfr) \times \right. \\ \left. \times (2,9 e^{-0,44nfr} - 1,82 e^{-0,24nfr}) \frac{I_1(0,52nfr)}{0,52nfr} \right\} \cdot \cos(0,47nfc_2t). \quad (4)$$

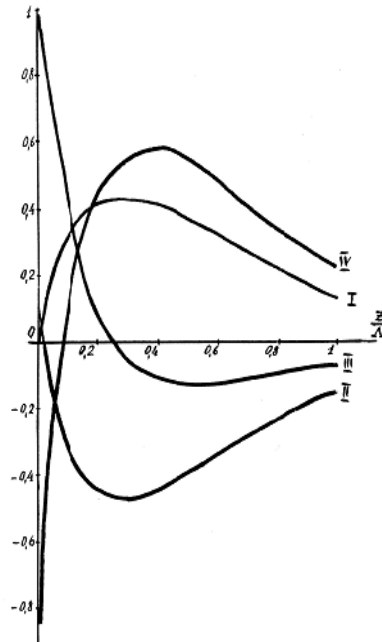


Рис. 1. Залежність безрозмірних параметрів, що характеризують напруження, від глибини  $\frac{z}{\Lambda}$

### Оцінка впливу хвиль Релея

Оцінимо вплив хвиль Релея на розподіл напружень, що виникають при співударі двох куль. Розглянемо співудар куль з однаковими геометричними і пружними характеристиками. Як було визначено в [ 1 ], найбільший вплив мають хвилі найнижчої частоти. Для прикладу знайдемо компоненту

$$\sigma_z = \sigma_z^{(k)} + \sigma_z^{(R)}, \quad (5)$$

де  $\sigma_z^{(k)} = -\frac{3P(t, \varepsilon, \omega)}{2\pi(z^2 + \rho^2)}$  – контактне напруження [ 3 ].

Для визначення  $\sigma_z^{(R)}$  користуємось виразами ( 2 ). При  $n = 2$  і  $\nu = 0,25$  на осі симетрії тіл

$$\sigma_z^{(R)} = \frac{3,5A\mu}{2f} (e^{-0,88fz} - e^{-0,48fz}) \cos(0,94fc_zt). \quad (6)$$

Якщо радіуси куль  $R_1 = R_2 = 5$  см, швидкість відносного зближення  $v_0 = 100$  см/сек, то [4]  $A = \frac{1}{R} = 0,2$  см<sup>-1</sup>,  $m \approx 0,67 \cdot 10^{-3}$  кг · сек<sup>2</sup>/см,  $\mathcal{G} = 4 \cdot 10^{-7}$  см<sup>2</sup>/кг,  $\kappa = 1,12 \cdot 10^4$  см/кг<sup>2/3</sup>.

Залежність  $\sigma_z$  і  $T_{rz}$  від  $z$  зображена на рис. 2 і рис. 3. Тут  $\rho$  – радіус поверхні контакту.

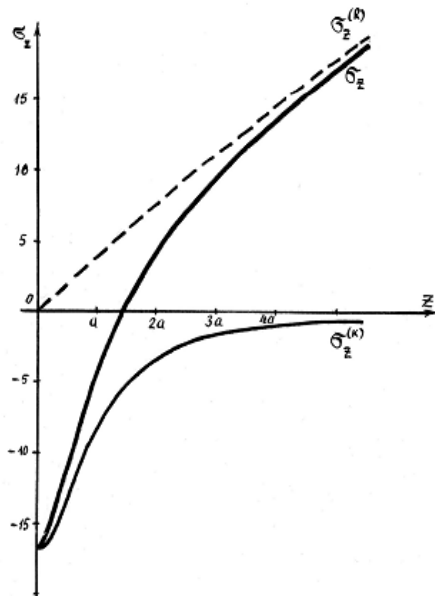


Рис. 2. Залежність нормальних складових напружень від глибини  $z$

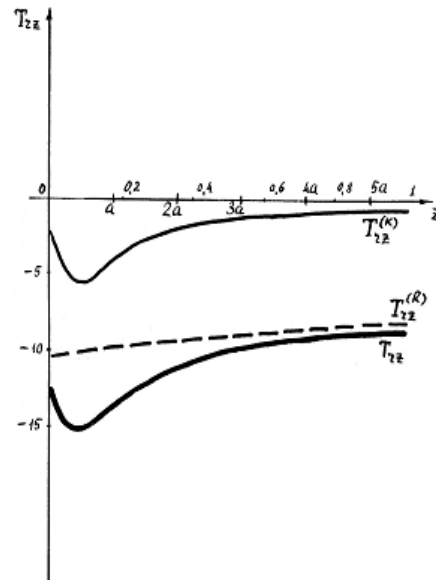


Рис. 3. Залежність дотичних складових напружень від глибини  $z$

## Висновки

З рис. 1 і рис. 2 видно, що поблизу поверхні  $\sigma_z \approx \sigma_z^{(k)}$ . З ростом  $z$   $\sigma_z^{(k)}$  швидко зменшується (на глибині, рівній 5 – 6 радіусам поверхні контакту,  $\sigma_z^{(k)}$  затухає майже повністю), а  $\sigma_z^{(R)}$  значно зростає. Цей висновок підтверджує припущення Релея про те, що поверхневі хвилі «мусять по мірі віддалення від джерела набувати все більш переважного значення». В розглянутому прикладі напруження  $\sigma_z^{(R)}$  не досягло можливого максимального значення. Очевидно, в зв'язку з тим, що вплив хвиль Релея істотний на значній глибині, повністю  $\sigma_z^{(R)}$  можна дослідити, розглядаючи співудар кулі і необмеженого простору, або кулі і товстої плити.

Таким чином, поверхневі хвилі істотно впливають на напруження, що виникають в тілах при їх співударі. В той час, коли контактні складові напружень вже повністю затухають, напруження, викликані хвилями Релея, набувають все більшого значення.

## Список використаної літератури

1. Кильчевский Н. А. О поверхностных волнах, возникающих при соударении упругих тел.[Текст]/ Н. А. Кильчевский, Д. И. Ильчишина // Прикладная механика, т. V, в.7, 1969 г.
2. Ильчишина Д. І. Поверхневі хвилі при контактному динамічному стисненні пружних тіл та узагальнення теорії удару Г. Герца. [Текст] / Д. І. Ильчишина, Л. М. Шальда//Труды МНТК «Гіротехнологія, навігація ...», К., 2011 р.
3. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел. [Текст] / А. Н. Динник // Изв. КПИ, 1909 г.
4. Тимошенко С.П., Теория упругости/[Текст]/ С. П. Тимошенко //ОНТИ, М.–Л., 1934 г.
5. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар[Текст]/ Н. А. Кильчевский // «Наукова думка», К., 1976 р.
6. Ильчишина Д. И. О влиянии поверхностных волн на процесс соударения упругих тел.[Текст]/ Д. И. Ильчишина, С. С. Ковтун //Сб. МГС, №3, 1984 г.
7. Ильчишина Д. И. О влиянии поверхностных волн, вызванных ударом, на коэффициент восстановления.[Текст]/ Д. И. Ильчишина // Доклады АН УССР, серия А, №4, 1975.
8. Дейвис Р. М. Волны напряжения в твердых телах [Текст] / Р. М. Дейвис // ИЛ., М., 1961 г.
9. Ильчишина Д. І. Вплив властивостей поверхонь тіл при співударі на характеристики хвиль Релея, викликаних ударом. [Текст] / Д. І. Ильчишина, О. М. Иванова// ІСМК, №8, 2012 р.
10. Ильчишина Д. И. О влиянии поверхностных волн, вызванных ударом, на коэффициент восстановления. [Текст]/ Д. И. Ильчишина, Е. Ф. Чечельницкая // Тр. V Нац. конгресса о теоретической и прикладной механике, НАБ, 1985.