УДК 528.281

DOI: https://doi.org/10.20535/0203-3771452023296673

О. В. Заморський[1], *к.т.н., доцент*, **В. В. Аврутов[2]**, *д.т.н., професор*

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ МЕТОДІВ АВТОНОМНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ШИРОТИ

Ua У статті проводиться аналіз методів і способів автономного визначення широти. Розглядаються кінематичні схеми прив'язки до географічної системи координат інерціальних модулів, що застосовуються для аналітичного та напіваналітичного методу автономного визначення широти. Приводяться аналітичні вирази для розглянутих способів визначення широти шестикомпонентним (три акселерометри та три гіроскопи) та однокомпонентним (один гіроскоп) інерціальним вимірювальним модулем. Показано, що розглянутими методами і способами визначається астрономічна широта. Розглядаються теоретичні та практичні моделі Землі – сфера, еліпсоїд обертання, геоїд. Вказано на проблему визначення аналітичних співвідношень між астрономічною та геодезичною широтами. Подаються наближені аналітичні вирази, що пов'язують визначену астрономічну широту з геодезичною широтою в системі координат світової геодезичної система *WGS*84.

En The article analyzes methods and techniques of autonomous latitude determination. Kinematic schemes for georeferencing inertial modules in the geographic coordinate system are discussed, which are used for the analytical and semi-analytical methods of autonomous latitude determination. Analytical expressions are provided for the discussed methods of latitude determination using six-component (three accelerometers and three gyroscopes) and single-component (one gyroscope) inertial measurement unit. It is shown that the astronomical latitude is determined by the examined methods and techniques. Theoretical and practical models of the Earth are considered, including the sphere, ellipsoid of rotation, and geoid. The issue of determining analytical relationships between astronomical and geodetic latitudes is addressed. Approximate analytical expressions relating the determined astronomical latitude to the geodetic latitude in the World Geodetic System 1984 (WGS84) coordinate system are presented.

Вступ

Визначення географічних координат рухомого об'єкта на поверхні чи біля поверхні Землі або нерухомої точки на земній поверхні є головною задачею навігації рухомих об'єктів та однією із головних задач геодезії відповідно. Через складну форму поверхні, складну внутрішню структуру, статичні та динамічні властивості Землі тощо, що впливає на методи та способи визначення координат, не існує абсолютних географічних коорди-

[1] *КПІ ім. Ігоря Сікорського*
[2] *КПІ ім. Ігоря Сікорського*

нат, зокрема – абсолютної широти. Числові значення координат мають сенс лише у прив'язці до системи координат певної моделі Землі, параметри якої задані та аналітично описані. Згадування географічних координат без такої прив'язки доречне лише у загальних випадках та коли точність їх визначення не має значення або може бути достатньо низькою.

Відомі аналітичний та напіваналітичний методи автономного визначення широти та способи їх реалізації на основі шестикомпонентного (три акселерометри та три гіроскопи) та однокомпонентного (один гіроскоп) інерціального вимірювального модуля описані у [1] та [2]. Під час проведеня експериментальних досліджень інерціального вимірювального модуля у режимі автономного визначення широти без будь яких попередньо відомих умов про місцеположення точки або об'єкта на поверхні або біля поверхні Землі виникає проблема оцінки точності такого визначення широти.

Постановка задачі

Метою роботи є визначення у першому наближені аналітичних співвідношень між широтою, автономно визначеною інерціальним вимірювальним модулем [1, 2], та широтою, яка може бути визначена іншими доступними засобами із достатньо високою точністю.

Методи і способи автономного визначення широти

Аналітичний метод автономного визначення широти із застосуванням трьохосьового шестикомпонентного інерціального вимірювального модуля (три гіроскопи та три акселерометри, рис. 1, *а*) є інваріантним до просторової орієнтації інерціального модуля [1].

Широта φ визначається як

$$\varphi = -\arcsin\frac{\omega_x g_x + \omega_y g_y + \omega_z g_z}{\omega g}, \qquad (1)$$

де ω – кутова швидкість добового обертання Землі; g – прискорення вільного падіння; ω_x, ω_y, ω_z – складові кутової швидкості добового обертання Землі та g_x, g_y, g_z – складові прискорення вільного падіння, виміряні інерціальним модулем при його нерухомій основі (рис. 1, *а*).

Напіваналітичний метод із застосуванням однокомпонентного інерціального модуля (один гіроскоп – датчик кутової швидкості рис. 1, *б*) передбачає фізичне моделювання площини географічного горизонту та послідовну зміну напрямку осі вимірювання датчика кутової швидкості у площині горизонту та по вертикалі місця. Напіваналітичний метод визначення широти є інваріантним до зміщення нуля та масштабного коефіцієнту датчика кутової швидкості [2]. Широта φ визначається через обчислення як

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega_5 - \omega_6}{\omega_1 - \omega_3}\cos\psi, \quad \psi = \operatorname{arctg}\frac{\omega_4 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_3}, \tag{2}$$

де ψ – істинний азимут вихідного положення осі вимірювання датчика кутової швидкості; $\omega_1, \ldots, \omega_6$ – кутові швидкості, виміряні датчиком кутової швидкості при відповідній позиції осі вимірювання (рис. 1, *б*).

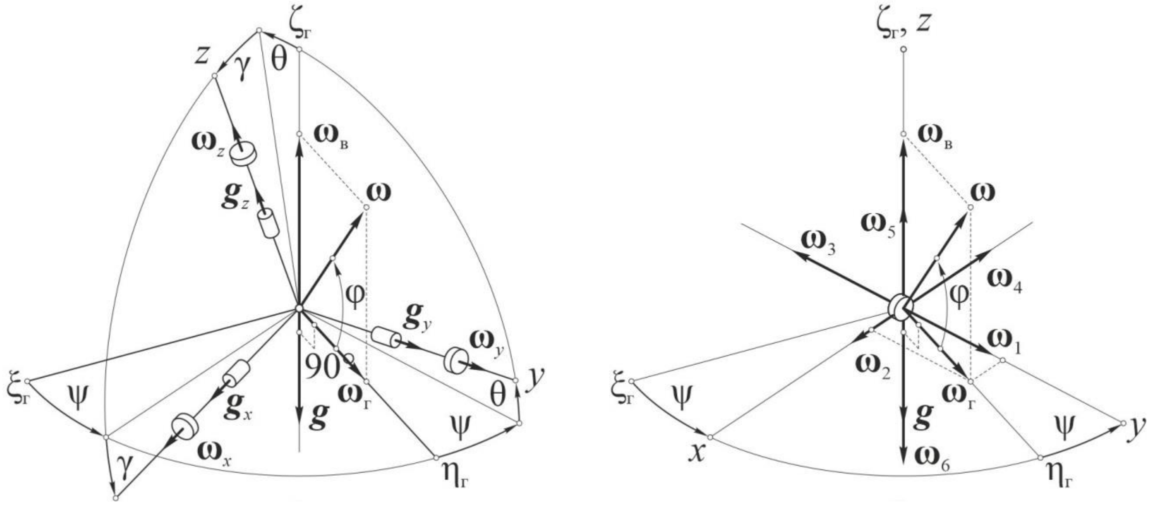
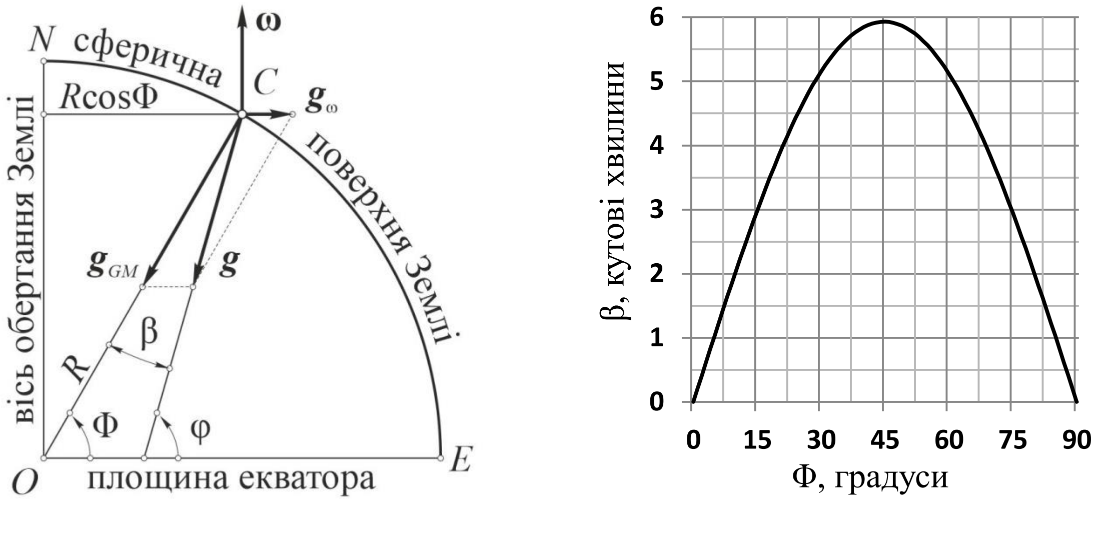


Рис. 1. Кінематичні схеми до способів автономного визначення широти: *а*) шестикомпонентним інерціальним модулем, *б*) однокомпонентним інерціальним модулем, де системи координат: $\xi_г\eta_г\zeta_г$ – опорна географічна; xyz – пов'язана із інерціальним вимірювальним модулем

Із кінематичних схем способів автономного визначення широти у разі нерухомої відносно Землі основи (рис. 1) випливає, що під час застосування розглянутих методів визначається астрономічна широта φ (рис. 2, ***а***).

Моделі Землі. Географічні широти

Під час вирішення прикладних задач орієнтації рухомого об'єкта достатньо застосування найпростішої моделі Землі – сфери зі стандартним (середнім) радіусом R Землі, центр якої співпадає із центром мас Землі. Положення точки або об'єкта на сфері Землі визначається геоцентричними сферичними координатами широти Φ та довготи Λ. Аналітичне представлення сферичних параметрів досить просте. Зв'язок між геоцентричною Φ та астрономічною φ широтами можна представити через відхилення β прямовисної лінії від нормалі до сферичної поверхні Землі (рис. 2, ***а***) як



***а*)** **б)**

Рис. 2. Сферична модель Землі, де Φ – геоцентрична та φ - астрономічна широти, β – відхилення прямовисної лінії

$$\varphi = \Phi + \beta. \tag{3}$$

Відхилення β прямовисної лінії можна визначити (рис. 2) як

$$\beta = \arccos\sqrt{\frac{g_{GM}^2 + g^2 - g_\omega^2}{2 g_{GM} g}}\,, \tag{4}$$

де гравітаційне прискорення g_{GM}, відцентрове прискорення g_ω та прискорення вільного падіння g визначають виразами

$$g_{GM} = \frac{GM}{R^2}, \quad g_\omega = \omega^2 R\cos\Phi, \quad g = \sqrt{g_{GM}^2 + g_\omega^2 - 2 g_{GM} g_\omega \cos\Phi} \tag{5}$$

для яких значення гравітаційної сталої GM Землі (*the central term in the Earth's gravitational field*) та кутової швидкості ω добового обертання Землі визначені із достатньо високою точністю [3]:

$$GM = 3986004{,}418 \cdot 10^8 \text{ м}^3\text{с}^{-2}; \;\; \omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}\,. \tag{6}$$

Залежність (4) відхилення β прямовисної лінії від нормалі до сферичної поверхні Землі у разі стандартного радіуса Землі $R = 6375416{,}324$ м показана графічно (рис. 2, ***б***). Відхилення β приймає максимальне значення $5{,}9524'$ за значення геоцентричної широти Φ, близької до $45°$.

Під час вирішення навігаційних та геодезичних задач для забезпечення необхідної точності визначення координат застосовуються більш складні моделі Землі – еліпсоїд обертання та геоїд.

Найбільш наближеною до фігури Землі є модель глобального геоїда, поверхня якого співпадає із середнім рівнем спокійної поверхні світового океану, без припливів і відливів, утворюючи нульовий рівень світового океану, продовжений на суходолі. Значення прискорення вільного падіння g у будь якій точці поверхні геоїда однакові. У кожній точці геоїда прямовисна лінія, по якій направлений вектор прискорення вільного падіння g, утворює нормаль до геоїда, а в площині земного меридіану утворює з площиною земного екватора кут φ, який можна виміряти астрономічним способом. Координати точки земної поверхні, виміряні астрономічним способом, називають астрономічною широтою φ та астрономічною довготою λ. Через складний характер гравітаційного поля Землі, його динаміку та аномалії, поверхня геоїда має хвилястий характер, який складно описати аналітично (рис. 3).

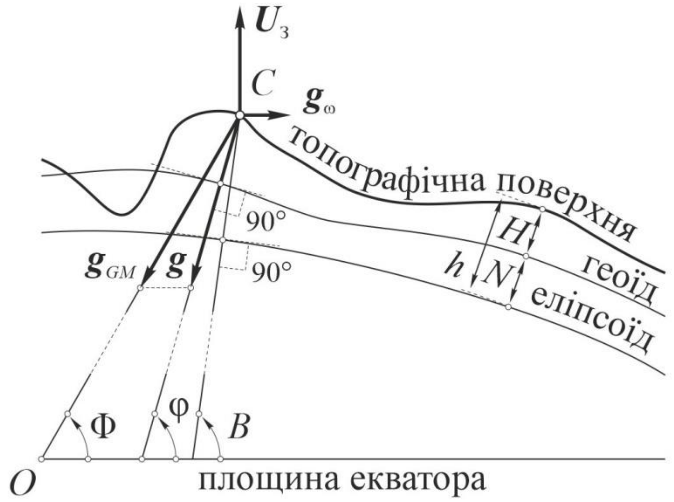


Рис. 3. Топографічна поверхня Землі, поверхні геоїда та еліпсоїда обертання, де Φ – геоцентрична, φ – астрономічна, B - геодезична широти; h – висота точки земної поверхні над еліпсоїдом; H – ортометрична висота; N – висота геоїда над еліпсоїдом

Для вирішення навігаційних і певних геодезичних задач застосовується більш проста та аналітично описана модель Землі – еліпсоїд обертання, центр якого співпадає з центром мас Землі (рис. 3). Супутникова глобальна система позиціонування *GPS* (*Global Positioning System*) базується на світовій геодезичній системі *WGS*84 (*World Geodetic System* 1984) і застосовує еліпсоїд обертання *GRS*80 (*Geodetic Reference System* 1980) [3]. Інші глобальні навігаційні супутникові системи – європейська *Galileo*, російська ГЛОНАСС та китайська *BeiDou* застосовують власні геодезичні системи зі своїми референц-еліпсоїдами. Низка країн застосовує національні геодезичні системи [4], які більш вдало, чим глобальна система, співпадають із регіональною топографічною поверхнею. У геодезичних системах на основі еліпсоїда обертання визначаються геодезичні координати широти *B*, довготи *L* та висоти *H*, які для однієї і тієї ж точки земної поверхні приймають різні значення, залежно від застосованої геодезичної системи. Жодне із цих різних значень геодезичних координат для однієї і тієї ж точки земної поверхні не є помилковим та підходить для вирішення тієї чи іншої задачі.

Зв'язок між астрономічною та геодезичною широтами

Астрономічна широта φ визначається як кут між прямовисною лінією, яка перпендикулярна до поверхні геоїда, та екваторіальною площиною, а геодезична широта B визначається як кут між геодезичною вертикаллю, яка перпендикулярна до поверхні еліпсоїда, та екваторіальною площиною [5] (рис. 3). Вибравши для зручності таку точку C на поверхні Землі, яка належить також поверхні референц-еліпсоїда вибраної геодезичної системи (рис. 4), можна показати зв'язки між геодезичною B, астрономічною φ та геоцентричною Φ широтами як

$$\varphi = \Phi + \beta, \qquad B = \varphi + \xi = \Phi + \beta + \xi = \Phi + \mu, \qquad \mu = \beta + \xi, \tag{7}$$

де β – відхилення прямовисної лінії від лінії, що утримує радіус-вектор $\vec{r}_e$ референц-еліпсоїда, ξ – відхилення прямовисної лінії від геодезичної вертикалі, μ – кут між геодезичною вертикаллю та радіус-вектором $\vec{r}_e$ референц-еліпсоїда.

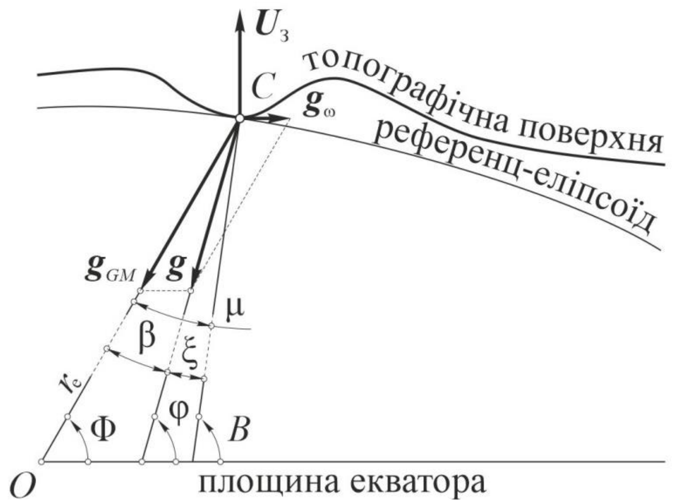


Рис. 4. До визначення залежності між геоцентричною Φ, астрономічною φ та геодезичною B широтами

Залежність між геодезичною B та геоцентричною Φ широтами, які неможливо автономно виміряти у будь якій точці земної поверхні, визначається точно параметрами референц-еліпсоїда [6]:

$$\mathrm{tg}B = \frac{a^2}{b^2}\mathrm{tg}\Phi\,, \tag{8}$$

де a і b – довжина великої і малої напівосі референц-еліпсоїда відповідно.

Оскільки прямовисна лінія є нормаллю до поверхні геоїда і не існує точного аналітичного опису поверхні геоїда, яка має складний динамічний хвилястий характер, неможливо точно аналітично визначити значення відхилень β та ξ прямовисних ліній, що пов'язують астрономічну широту φ із геоцентричною Φ та геодезичною B широтами відповідно (7) (рис. 4).

Для вибраного референц-еліпсоїда відхилення β прямовисної лінії у першому наближені можна визначити згідно (4) із урахуванням (5) і (6), якщо у (5) значення радіуса R визначити як радіус r_e точки на поверхні референц-еліпсоїда наступним чином:

$$R = r_e = \frac{ab}{\sqrt{(b\cos\Phi)^2 + (a\sin\Phi)^2}}. \qquad (9)$$

Відхилення ξ прямовисних ліній, що пов'язує астрономічну ту φ із геодезичною широтою B у першому наближені можна визначити згідно (7) і (8) як

$$\xi = \mu - \beta, \qquad \mu = \operatorname{arctg}\left(\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\Phi\right) - \Phi \qquad (10)$$

Залежності $\beta(\Phi)$, $\xi(\Phi)$, $\mu(\Phi)$ (7, 10) у разі застосування світової геодезичної системи *WGS*84 із параметрами глобального еліпсоїда [3]

$$a = 6378137\,\text{м}, \quad \frac{1}{f} = 298{,}257223563,$$
$$b = a - fa = 6356752{,}314245\,\text{м}, \qquad (11)$$

де f – сплющення еліпсоїда, показані графічно (рис. 5).

Максимальні значення відхилень $\beta_{max} = 5{,}9300'$, $\xi_{max} = 5{,}6154'$ та $\mu_{max} = 11{,}5454'$ приймаються у разі значення геоцентричної широти Φ, близькому до $45°$.

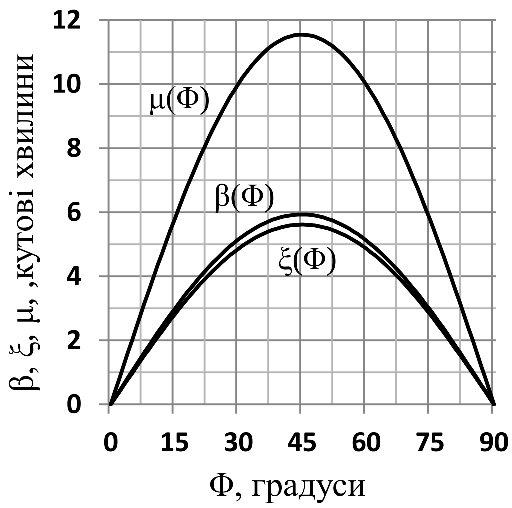


Рис. 5. Відхилення прямовисної лінії залежно від геодезичної широти у разі застосування світової геодезичної системи *WGS*84

Вказані вище відхилення ξ прямовисної лінії від геодезичної вертикалі, що пов'язують астрономічну широту φ із геодезичною широтою B, визначні за умови, що висота h точки земної поверхні над еліпсоїдом та гравітаційні аномалії Землі дорівнюють нулю. У разі їх не нульового значення відхилення ξ (10) необхідно визначати як

$$\xi = \operatorname{arctg}\left(\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\Phi\right) - \Phi - \beta + \Delta\xi_h + \Delta\xi_a, \tag{12}$$

де $\Delta\xi_h$ – складова відхилення ξ прямовисної лінії від геодезичної вертикалі за не нульової висоти h точки земної поверхні над еліпсоїдом, $\Delta\xi_a$ - складова відхилення ξ прямовисної лінії від геодезичної вертикалі при наявності гравітаційних аномалій внаслідок неоднорідної внутрішньої структури Землі.

Складову відхилення $\Delta\xi_h$ можна прибрати із виразу (12), якщо її врахувати під час визначення відхилення β згідно (4, 5, 6, 9) для чого у (9) необхідно врахувати висоту h точки земної поверхні над еліпсоїдом як

$$R = r_e + h = \frac{ab}{\sqrt{(b\cos\Phi)^2 + (a\sin\Phi)^2}} + h. \tag{13}$$

Для визначення висоти h та складової відхилення $\Delta\xi_a$ необхідні додаткові технічні гравіметричні засоби [5], про що далі не розглядається.

Попередні розрахунки із урахуванням (13) показують, що на висоті $h = 100$м за геоцентричної широти $\Phi = 45°$ для геодезичної системи $WGS84$ складова відхилення $\Delta\xi_h = -0{,}0168''$, а на висоті $h = 1000$м складова відхилення $\Delta\xi_h = -0{,}1681''$.

Тут необхідно зазначити, що зі зміною ортометричної (абсолютної) висоти H окрім зміни значення складової відхилення $\Delta\xi_h$ змінюється значення прискорення вільного падіння g, тому, у разі застосування способу [1] автономного визначення астрономічної широти φ, яке було б інваріантним до зміни абсолютної висоти точки вимірювання, замість виразу (1) варто послуговуватись таким аналітичним виразом:

$$\varphi = -\arcsin\frac{\omega_x g_x + \omega_y g_y + \omega_z g_z}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}}. \tag{14}$$

Величина складової відхилення $\Delta\xi_a$ коливається у рівнинній місцевості від $\pm(3''\ldots5'')$ у середньому до $\pm(10''\ldots15'')$ у аномальних зонах, у гірській місцевості – до $\pm30''$. Максимальне значення відхилень прямовисних ліній виявлено у районі Гавайських островів – біля $97''$ [7].

Висновки

Розглянутими аналітичним та напіваналітичним методами, реалізованими застосуванням шестикомпонентного (три акселерометри та три гіроскопи) та однокомпонентного (один гіроскоп) інерціального вимірювального модуля відповідно, автономно визначається астрономічна широта.

Кінематичні схеми інерціальних вимірювальних модулів, на основі яких реалізовані розглянуті методи автономного визначення широти, однозначно геометрично прив'язані до поверхні геоїда через прямовисну лінію. Отже, зв'язок між визначеною розглянутими методами астрономічною широтою та геодезичною широтою можна визначити через відхилення ξ прямовисної лінії від нормалі до референц-еліпсоїда вибраної геодезичної системи координат.

Оскільки не існує точного аналітичного опису поверхні геоїда, яка має складний хвилястий характер, неможливо точно аналітично визначити значення ξ відхилення прямовисних ліній. Приведені вище вирази (4, …, 10) дозволяють аналітично пов'язати у першому наближенні визначену автономно астрономічну широту із геодезичною широтою заданої (вибраної) геодезичної системи із абсолютною похибкою менше $\pm 1'$, яка складається із суми $\Delta\xi_h$ та $\Delta\xi_a$ відхилень прямовисної лінії від геодезичної вертикалі за не нульової висоти h точки земної поверхні над еліпсоїдом та при наявності гравітаційних аномалій внаслідок неоднорідної внутрішньої структури Землі відповідно.

Список використаної літератури

1. *Аврутов В. В.* Автономное определение начальной широты с помощью инерциально-измерительного модуля // Прикладна механіка. – Київ, 2018. – 54, № 5. – С. 116-122.
2. *Заморський О. В.* Про автономне визначення широти місцеположення об'єкта однокомпонентним аналітичним гіроскопічним компасом. // Механіка гіроскопічних систем. Науково-технічний збірник. Вип. 41 (2021). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – С. 132-138.
3. World Geodetic System 1984. Its definition and relationships with Local Geodetic System // Approved for public release. – USA: Department of defense, 2000. – 175 p.
4. Geodesy and Positioning. A Guide to Coordinate Systems in Great Britain. – Southampton, United Kingdom: Customer Service Centre Ordnance Survey, 2020. – 53 p.
5. *Машимов М. М.* Геодезия. Теоретическая геодезия. Справочное пособие. – М., СССР: Недра, 1991. – 268 с.
6. *Бабич О. А.* Обработка информации в навигационных комплексах. – М., СССР: Машиностроение, 1991. – 512 с.

7. *Двуліт П.Д., Двуліт З.П., Сідоров І.С.* Визначення відхилень прямовисних ліній з використанням тригонометричного нівелювання та GNSS-вимірювань // Геодезія, картографія і аерофотознімання. Науково-технічний збірник. Вип. 89 (2019). – Львів: Львівська політехніка, 2019. – С. 12–19.