УДК 53.082.76:519.615
DOI: http://dx.doi.org/10.20535/0203-3771342017130233

Г. П. Гречка[1], *доцент, к.т.н.*

ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛУ ЗБУРЕННЯ, ЩО ВИКЛИКАНО АПЕРІОДИЧНИМ ПРОЦЕСОМ, У РАЗІ ВИЗНАЧЕННЯ ПОСТІЙНОГО КОРИСНОГО СИГНАЛУ

En Reviewed the general solution of the homogeneous second-order differential equation that describes the aperiodic processes. Coming out of the system of the four transcendental equations, which is composed from the primary to the fourth order inclusive of this solution, determined the amplitudes and damping decrements of these processes. Knowledge of these parameters allows us to describe the interference signal as a function of time.

Ru Рассмотрено общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка, которое описывает апериодические процессы. Исходя из системы четырех трансцендентных уравнений, состоящей из производных до четвертого порядка включительно этого решения, определяются амплитуды и декременты затухания таких процессов. Знание этих параметров позволяет описать сигнал возмущения как функции времени.

Вступ

Зараз широкого застосування набувають пересувні комплекси машин геодезичного забезпечення, призначені для завчасної або оперативної підготовки спеціальних геодезичних баз даних [1]. У комплексі використовуються досягнення й схеми побудови навігаційних систем із широким використанням обчислювальної техніки. За допомогою засобів гіроскопічної орієнтації (гірокомпасів) та гравіметричної апаратури за взаємодії із супутниковою навігаційною системою, комплекс здатний із високою точністю визначати дані геодезичної мережі. Під час роботи комплексу на стоянці він підлягає збуренням, викликаними поривами вітру, переміщеннями чле-

[1] *НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

нів екіпажу та вантажів (наприклад, використанням палива), що накладає збурення на постійні корисні сигнали гірокомпасування та гравіметричні вимірювання.

У роботі [2] розглядається задача корекції корисного постійного сигналу, порушеного аперіодичними збуреннями. Така задача виникає у разі визначення азимута по горизонтальній складовій кутової швидкості обертання Землі та у разі відповідних вимірюваннях сили тяжіння гравітаційного поля Землі у даній точці земної поверхні. Запропонована у роботі функція корекції аперіодичних збурень складна та не має явно виражених параметрів, які характеризують ці процеси: амплітуд та декрементів затухання. Для багатьох практичних застосувань важливо знати ці параметри як, наприклад, у разі побудови структурних методів дослідження сигналів [3], які в свою чергу вимірюються за допомогою комп'ютерних вимірювальних систем. Крім того, ці параметри необхідно обов'язково знати під час аналізу похибок у разі проведення цих вимірювань [4]. Знаючи їх легко дати також аналітичний опис збурення як функції часу.

Мета статті

Знайти аналітичний опис сигналу завади як функції часу, викликаної аперіодичним збуренням, із метою подальшого використанні цієї функції для знаходження постійного корисного сигналу.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо наступну задачу. Нехай

$$F_\Sigma(t) = F_c + F(t), \quad t \geq 0.$$

Тут F_c – постійне невідоме число, яке характеризує сталу величину постійного корисного сигналу, а $F(t)$ є розв'язок деякого диференціального однорідного рівняння виду , що описує аперіодичне збурення.

Аперіодичні коливання описуються розв'язком однорідного диференціального рівняння другого порядку [5]:

$$\ddot{x}(t) + 2h\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \ t > 0; \ x_0(0) = x_0; \ \dot{x}(0) = x_1, \tag{1}$$

де $x(t)$ є розв'язком рівняння (1).

Відомо, що $h > 0$ і тоді корені характеристичного рівняння

$$\lambda_1 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -q_1,$$

$$\lambda_2 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -q_2,$$

дійсні $(h > \omega_0)$, а самі h і ω_0 невідомі за умову $0 < q_1 < q_2$.

Ці початкові умови характеризують аперіодичні процеси [5]. Загальний розв'язок однорідного рівняння (1) має вигляд

$$x(t) = \mathrm{A}e^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t},\ t \geq 0 \tag{2}$$

і таким чином маємо чотири невідомих коефіцієнта A, B, q_1, q_2.

Функцію $F_\Sigma(t)$ можна трактувати як вихідний сигнал вимірювального пристрою, на вхід якого подається сигнал $x(t)$ за умови $t > 0$. На практиці перевагу віддають вимірювальним пристроям частотного типу [6].

Задача полягає у наступному: необхідно визначити у точці $t > 0$ значення функції $F(t_0) = x(t_0)$, знаючи чотири перших похідних функції (2):

$$F'(t_0) = x'(t_0);\ F''(t_0) = x''(t_0);\ F'''(t_0) = x'''(t_0);\ F^{(4)}(t_0) = x^{(4)}(t_0).$$

Так як всі похідні функції $F(t_0) = x(t_0)$; співпадають із відповідними похідними x, то фактично задача складається до того, щоб по значенням похідних $x'(t_0)$; $x''(t_0)$; $x'''(t_0)$; $x^{(4)}(t_0)$, які безпосередньо вимірюються у точці t_0, відновити $x(t_0)$. Задача зводиться до розв'язання наступної системи трансцендентних рівнянь [7]

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= -q_1 Ae^{-q_1 t_0} - q_2 Be^{-q_2 t_0}, \\ F''(t_0) &= q_1^2 Ae^{-q_1 t_0} + q_2^2 Be^{-q_2 t_0}, \\ F'''(t_0) &= -q_1^3 Ae^{-q_1 t_0} - q_2^3 Be^{-q_2 t_0}, \\ F^{(4)}(t_0) &= q_1^4 Ae^{-q_1 t_0} + q_2^4 Be^{-q_2 t_0}. \end{aligned} \tag{3}$$

у припущенні, що $q_1, q_2 > 0, q_2 > q_1$.

Введемо такі позначення:

$$F'(t_0) = a;\ F''(t_0) = b;\ F'''(t_0) = c;\ F^{(4)}(t_0) = d;$$
$$q_1 = v;\ q_2 = u;\ Ae^{-q_1 t_0} = s;\ Be^{-q_2 t_0} = r.$$

Внаслідок припущення маємо $u > \nu > 0$. Використовуючи введені позначення маємо:

$$\begin{cases} a = -us - vr; \\ b = u^2 s + v^2 r; \\ c = -u^3 s - v^3 r; \\ d = u^4 s + v^4 r, \end{cases} \tag{4}$$

де u, ν, s, r – невідомі. Величини $a,\ b,\ c,\ d$ – відомі.

Помножимо перше та третє рівняння системи (4) на *u*. Матимемо:

$$\begin{cases} au = -u^2 s - uvr; \\ b = u^2 s + v^2 r; \\ cu = -u^4 s - uv^3 r; \\ d = u^4 s + v^4 r. \end{cases}$$

Далі до першого рівняння додамо друге, а до третього – четверте.

$$\begin{cases} au + b = v^2 r - uvr; \\ cu + d = v^4 r - uv^3 r. \end{cases}$$

У правій частині кожного із цих рівнянь винесемо за дужки r та виразимо r із обох рівнянь

$$\begin{cases} r = \dfrac{au+b}{v^2 - uv}; \\ r = \dfrac{cu+d}{v^4 - uv^3}. \end{cases} \qquad (5)$$

Помножимо тепер перше та трете рівняння системи (4) на v. Матимемо:

$$\begin{cases} av = -uvs - v^2 r; \\ b = u^2 s + v^2 r; \\ cv = -vu^3 s - v^4 r; \\ d = u^4 s + v^4 r. \end{cases}$$

Далі до першого рівняння додамо друге, а до третього – четверте. Прийматимемо:

$$\begin{cases} av + b = u^2 s - uvs; \\ cv + d = u^4 s - vu^3 s. \end{cases}$$

Винесемо за дужки s та виразимо s із обох рівнянь:

$$\begin{cases} s = \dfrac{av+b}{u^2 - uv}; \\ s = \dfrac{cv+d}{u^4 - vu^3}. \end{cases} \qquad (6)$$

Внаслідок припущення, знаменники у правих частинах рівнянь системи (5), (6) відмінні від нуля.

Перепишемо системи (5) та (6) наступним чином: перші два рівняння утворять одну систему, другі два – другу систему рівнянь:

$$\begin{cases} r = \dfrac{au+b}{v^2 - uv}; \\ s = \dfrac{av+b}{u^2 - uv}. \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{cu+d}{v^4 - uv^3}; \\ s = \dfrac{cv+d}{u^4 - vu^3}. \end{cases} \tag{8}$$

Із системи (7) знаходимо:

$$r + s = \frac{au+b}{v^2 - uv} + \frac{av+b}{u^2 - uv} = \frac{-a(u+v) - b}{uv}. \tag{9}$$

Випишемо перше та друге рівняння системи (4) та підставимо у них значення r та s із (8):

$$\begin{cases} a = -u\dfrac{cv+d}{u^4 - vu^3} - v\dfrac{cu+d}{v^4 - uv^3} = -\dfrac{cv+d}{u^2(u-v)} + \dfrac{cu+d}{v^2(u-v)}; \\ b = u^2\dfrac{cv+d}{u^4 - vu^3} + v^2\dfrac{cu+d}{v^4 - uv^3} = \dfrac{cv+d}{u(u-v)} - \dfrac{cu+d}{v(u-v)}. \end{cases} \tag{10}$$

Помножимо перше рівняння системи (10) на $u^2v^2(u-v)$, а друге – на $uv(u-v)$. Маємо:

$$\begin{cases} au^2v^2(u-v) = -(cv+d)v^2 + (cu+d)u^2; \\ buv(u-v) = (cv+d)v - (cu+d)u. \end{cases}$$

Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$\begin{cases} au^2v^2(u-v) = c(u^3 - v^3) + d(u^2 - v^2); \\ buv(u-v) = -c(u^2 - v^2) - d(u-v). \end{cases} \tag{11}$$

Використовуючи формули:

$$u^2 - v^2 = (u-v)(u+v);$$

$$u^3 - v^3 = (u-v)(u^2 + uv + v^2) = (u-v)((u+v)^2 - uv)$$

перепишемо систему (11), скоротивши її рівняння на $u - v \neq 0$. Отримаємо:

$$\begin{cases} au^2v^2 = c\left[(u+v)^2 - uv\right] + d(u+v); \\ buv = -c(u+v) - d. \end{cases} \tag{12}$$

Введемо нові позначення:

$$u + v = m, \quad uv = n.$$

Внаслідок припущення, $n > 0$, $m > 0$, система рівнянь (12) запишеться таким чином:

$$\begin{cases} an^2 = c(m^2 - n) + dm; \\ bn = -cm - d. \end{cases} \tag{13}$$

Розглянемо різні випадки розв'язку цієї системи рівнянь.

Випадок I. Припустимо, що $c \neq 0$. Із другого рівняння системи (13) визначимо m:

$$m = \frac{-bn - d}{c}. \qquad (14)$$

Підставимо знайдене значення m у перше рівняння системи (13):

$$an^2 = c\left[\left(\frac{-bn-d}{c}\right)^2 - n\right] + d\,\frac{-bn-d}{c};$$

$$acn^2 = d^2 + b^2n^2 + 2bnd - c^2n - d^2 - bdn;$$

$$n^2(ac - b^2) + n(c^2 - bd) = 0.$$

Оскільки $n > 0$, то останнє рівняння можна скоротити на n:

$$n\left(ac - b^2\right) + \left(c^2 - bd\right) = 0. \qquad (15)$$

У випадку $ac - b^2 = 0$, невідоме n не визначається однозначно:

– якщо $c^2 - bd = 0$, то довільне $n > 0$ задовольняє рівняння (15);
– якщо $c^2 - bd \neq 0$, то рівняння (15) несумісне. Тобто не має розв'язків.

Тому надалі розглядаємо випадок $ac - b^2 \neq 0$ і тоді n визначається як:

$$n = \frac{bd - c^2}{ac - b^2}.$$

Зауважимо, що $n > 0$ тоді і тільки тоді, коли $(ac - b^2)(bd - c^2) > 0$, тобто $bd - c^2$ та $ac - b^2$ мають однакові знаки.

Із рівняння (14) знаходимо

$$m = \frac{-b\dfrac{bd - c^2}{ac - b^2} - d}{c} = \frac{-b^2d + bc^2 - acd + b^2d}{c(ac - b^2)} = \frac{bc - ad}{ac - b^2}.$$

Зауважимо, що $m > 0$ тоді і тільки тоді, коли $bc - ad$ та $ac - b^2$ мають однакові знаки.

Таким чином, необхідною умовою визначеності заданої системи є умова, що $ac - b^2$, $bc - ad$, $bc - c$ мають однакові знаки (тобто одночасно додатні, або одночасно від'ємні).

Після знаходження додатних значень m, n із рівностей

$$m = \frac{bc - ad}{ac - b^2}, \qquad n = \frac{bd - c^2}{ac - b^2},$$

невідомі u, v знаходимо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} u+v=m, \\ uv=n. \end{cases} \tag{16}$$

Згідно припущення $0<q_1<q_2$, маємо $u>v$. Обидві частини першого рівняння системи (16) піднесемо до квадрата, а обидві частини другого домножимо на 4:

$$\begin{cases} (u+v)^2=m^2, \\ 4uv=4n. \end{cases} \tag{17}$$

Від першого рівняння системи (17) віднімемо друге і отримаємо:

$$(u-v)^2=m^2-4n.$$

Якщо $m^2-4n\le 0$, то задана система розв'язків не має. Якщо $m^2-4n>0$, то

$$\begin{cases} u+v=m, \\ u-v=\sqrt{m^2-4n}, \end{cases}$$

звідки

$$u=\frac{m+\sqrt{m^2-4n}}{2}, \quad v=\frac{m-\sqrt{m^2-4n}}{2}.$$

З рівнянь (7), отримаємо r, s:

$$r=\frac{au+b}{v(v-u)}, \quad s=\frac{av+b}{u(u-v)}.$$

Нарешті, $A=se^{vt_0}$; $B=re^{ut_0}$.

Отже, за $c\neq 0$ маємо такий алгоритм розв'язання заданої системи рівнянь:

Алгоритм 1 $(c\neq 0)$. Вхідні дані a, b, c, d, t_0.

1. Обчислюємо величини:

$$\lambda_1=ac-b^2, \quad \lambda_2=bd-c^2, \quad \lambda_3=bc-ad,$$

якщо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3>0$, або $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3<0$, то переходимо до пункту 2, якщо ні, то розв'язків немає.

2. Знаходимо

$$n=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad m=\frac{\lambda_3}{\lambda_1},$$

якщо $m^2-4n>0,$ то переходимо до пункту 3, якщо ні, то розв'язків немає.

3. Обчислюємо:

$$u=\frac{m+\sqrt{m^2-4n}}{2}, \quad v=\frac{m-\sqrt{m^2-4n}}{2}.$$

4. Знаходимо:

$$r=\frac{au+b}{v(v-u)},\qquad s=\frac{av+b}{u(u-v)}.$$

5. Обчислюємо: $A=se^{vt_0}$; $B=re^{ut_0}$.

Відповідь: $q_2=v$; $q_1=u$; $A,\ B$. Отже, шукана функція завади має такий вид:

$$F(t)=Ae^{-q_1t}+Be^{-q_2t}.$$

***Приклад* 1.**

Вхідні дані: $a=-3,\ b=5,\ c=-9,\ d=17,\ t_0=0$

1. $\lambda_1=(-3)(-9)-25=2,\quad \lambda_2=5\cdot17-(-9)^2=4,$
$\lambda_3=5\cdot(-9)—3\cdot17=6,\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$

2. Обчислюємо

$$n=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{4}{2}=2,\quad m=\frac{\lambda_3}{\lambda_1}=\frac{6}{2}=3$$

та підставляємо $m^2-4n=9-8=1>0$.

3. Обчислюємо

$$\mathrm{u}=\frac{\mathrm{m}+\sqrt{\mathrm{m}^2-4\mathrm{n}}}{2}=\frac{3+1}{2}=2,\quad v=\frac{m-\sqrt{m^2-4n}}{2}=\frac{3-1}{2}=1.$$

4. Обчислюємо

$$r=\frac{au+b}{v(v-u)}=\frac{-3\cdot2+5}{1(1-2)}=1,\quad s=\frac{av+b}{u(u-v)}=\frac{-3\cdot1+5}{2(2-1)}=1.$$

5. $A=se^0=1$; $B=re^0=1.$

Відповідь: $q_1=1$; $q_2=2$; $A=B=1.$

Шукана функція, що описує сигнал завади, виглядає так:

$$F(t)=e^{-t}+e^{-2t}.$$

Випадок II. Припустимо, що $c=0.$

У такому випадку система рівнянь (11) запишеться так:

$$\begin{cases}an^2=dm;\\ bn=-d.\end{cases}\tag{18}$$

Якщо $b=0$, то ця система або несумісна, або має безліч розв’язків.

Нехай $b\neq0$. Тоді з другого рівняння системи (18)

$$n=-\frac{d}{b}.$$

Зауважимо, що $n>0$ тоді і тільки тоді, коли b і d мають протилежні знаки.

Із першого рівняння системи (18)

$$m=\frac{an^2}{d}=\frac{ad}{b^2}.$$

Зауважимо, що $m > 0$ тоді і тільки тоді, коли a, d мають однакові знаки.

Нехай $m, n > 0$. Якщо $m^2 - 4n \le 0$, то система (16) розв'язків не має. Якщо $m^2 - 4n > 0$, то, як і в попередньому пункті,

$$u = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2}, \qquad v = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$$

і далі як у випадку I.

Алгоритм 2 (*c* = 0) Вхідні дані $a, b, c = 0;\ d, t_0$.

1. Якщо b, d мають протилежні знаки і a, d мають однакові знаки, то переходимо до пункту 2. У протилежному випадку – розв'язків немає або безліч.
2. Обчислюємо

$$n = -\frac{d}{b}, \qquad m = \frac{ad}{b^2}.$$

Якщо $m^2 - 4n > 0$, то переходимо до пункту 3, якщо ні, то розв'язків немає.

3. Обчислюємо:

$$u = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2}, \qquad v = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}.$$

4. Обчислюємо:

$$r = \frac{au + b}{v(v - u)}, \qquad s = \frac{av + b}{u(u - v)}.$$ 5.

6. Обчислюємо: $A = se^{vt_0}; \quad B = re^{ut_0}$.

Відповідь $q_1 = v;\ q_2 = u;\ A, B.$ Шукана функція, що описує сигнал збурення, виглядає так: $F(t) = Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t}$.

***Приклад* 2.** Вхідні дані: a=6, b=- 4, c=0, d=8, $t_0 = 0$.

1. b, d мають протилежні знаки a, d – однакові.
2. Обчислюємо

$$n = -\frac{8}{-4} = 2, \qquad m = \frac{6 \cdot 8}{16} = 3. \quad \text{Тоді } m^2 - 4n = 9 - 8 = 1 > 0.$$

3. Обчислюємо

$$u = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2, \qquad v = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$

4. Обчислюємо

$$r = \frac{au + b}{v(v - u)} = \frac{6 \cdot 2 - 4}{1(1 - 2)} = -8, \qquad s = \frac{av + b}{u(u - v)} = \frac{6 \cdot 1 - 4}{2(2 - 1)} = 1.$$

5. Обчислюємо

$$A = se^0 = 1; \quad B = re^{v \cdot 0} = 8.$$

Відповідь: $q_1 = 1;\ q_2 = 2;\ A = -8, B = 1.$

Остаточно, функція, що описує сигнал збурення, має такий вид:

$$F(t) = e^{-t} - 8e^{-2t}\ .$$

Висновки

Остаточно маємо такі аналітичні залежності для визначення параметрів аперіодичного збурення, які однозначно описують у часі функцію цього процесу.

Випадок І. У випадку $ac - b^2 \neq 0$, маємо:

а) для декрементів затухань:

$$q_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}; \qquad q_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2},$$

де

$$n = \frac{bd - c^2}{ac - b^2}; \quad m = \frac{bc - ad}{ac - b^2};$$

б) для амплітуд коливань:

$$A = se^{q_1 t_0}; \quad B = re^{q_2 t_0},$$

де $r = \dfrac{aq_2 + b}{q_1\left(q_1 - q_2\right)}$; $\qquad s = \dfrac{aq_1 + b}{q_2\left(q_2 - q_1\right)}.$

Випадок ІІ. У випадку $c = 0$, маємо:

а) для декрементів затухань:

$$q_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}; \quad q_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2},$$

де

$$n = -\frac{d}{b}; \quad m = \frac{ad}{b^2};$$

б) для амплітуди коливань знаходимо по залежностям (пункт б) випадок 1) цих висновків:

Шуканий постійний корисний сигнал визначається як :

$$F_c = F_\Sigma\left(t\right) - F\left(t\right).$$

Список використаної літератури

1. Призваны временем. От противостояния к международному сотрудничеству / Под общ. ред. С. Н. Конюхова. – Д.: АРТ- ПРЕСС, 2009. – 832 с.
2. *Гречка Г. П.* Відновлення корисного постійного сигналу, порушеного аперіодичними збуреннями. – Інформаційні системи, механіка та керу-

вання. - К.: Національний технічний університет «КПІ», 2015. Випуск 13. – С. 68–72.
3. *Заездный А. М.* Обработка сигналов на основе использования их структурных свойств. // А. М. Заездный, Е. И. Плоткин, Ю. И. Черкасский /– Радиотехника, 1971, т. 26, № 9. – С. 18–24.
4. О погрешностях дискретных структурно-сигнальных ИНЧ-частотомеров. – Сб. статьей «Автоматизация в нефтедобывающей промышленности». – Нальчик: Эльбрус, 1974, выпуск 3. – С. 130-135.
5. *Андронов А. А.*– Теория колебаний. / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин //М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. 1981. – 568 с.
6. *Ракаев А. П.* Измерение постоянной составляющей механической величины частотними преобразователями./ А. П. Ракаев / – Автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н. – М. 1973.– 26 с.
7. Энциклопедия элементарной математики /Под ред. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича, А. Я. Хинчина. Книга вторая. Алгебра. – М. – Л.: Государстенное изд-во технико-теоретической литературы, 1961. – 424 с.