

**АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ АЛГОРИТМІВ ІНТЕГРУВАННЯ  
КІНЕМАТИЧНИХ РІВНЯНЬ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА****Вступ**

Використання безплатформних інерціальних навігаційних систем (БІНС) як альтернативу платформним системам розглядають в багатьох роботах [1, 2] в зв'язку з їх високою надійністю, меншими габаритами, простотою і дешевизною виготовлення, а також можливістю їх застосування в умовах високодинамічного середовища.

Проте для побудови БІНС характерним є жорстке монтування інерціальних датчиків безпосередньо на самому носії, що є джерелом низки похибок цих систем. Одним з основних джерел похибок при розв'язанні навігаційної задачі в БІНС є кіничний рух, який може бути викликаний вібраціями двигуна, або різкими маневрами таких літальних апаратів (ЛА) як винищувачі чи ракети. Природа кіничного руху розглядається в джерелі [3]. Такий рух БІНС при цифровій обробці сигналів з інерціальних датчиків може призвести до накопичення похибки визначення координат об'єкта.

Необхідність підвищення точності розв'язання навігаційних задач спонукає вдосконалювати алгоритми обробки інформації первинних вимірювачів БІНС.

На сьогодні розроблено низку алгоритмів БІНС для різних типів руху, деякі з них представлені в роботах [3, 4, 5], але беручи до уваги те, що високодинамічне середовище виникнення кіничного руху висуває досить високі вимоги до інерціальної системи, то алгоритми, які успішно працюватимуть в цьому середовищі, матимуть успіх і при інших типах руху.

**Постановка задачі**

В даній роботі розглядаються похибки алгоритмів безплатформної інерціальної навігаційної системи і методи їх зменшення. Головним завданням є підтвердження, в умовах наявності кіничного руху, можливості використання простих за своєю структурою алгоритмів на високій частоті дискретизації зі збереженням точності в порівнянні з більш точнішими і структурно складнішими алгоритмами, що реалізуються на нижчих частотах.

### Математична модель руху твердого тіла в умовах кінчного руху

В останні роки обчислювальна техніка зробила значний крок вперед і на сьогодні доступні технічні засоби здатні оброблювати інформацію на досить високій частоті. Більшість алгоритмів БІНС створювалися при обмеженні на обчислювальні затрати бортового комп'ютера. Тому ці алгоритми розраховувалися на роботу при частоті, що не перевищувала б найвищу частоту в спектрі сигналу з інерціальних пристроїв. Але, як відомо, з імпульсної теореми [6], для успішного відновлення сигналу, частота дискретизації повинна перевищувати частоту максимального значення в спектрі вхідного сигналу мінімум в два рази. Для усунення даної проблеми в алгоритмах закладалося припущення про можливий тип руху об'єкта і для збільшення точності розроблялися все більш складніші алгоритми, метою яких було наближення обчисленого руху до істинного [4, 5]. Робота таких алгоритмів потребує апріорного знання руху об'єкта, що на практиці дуже важко, а іноді і неможливо реалізувати, а самі припущення вже є джерелом похибки роботи БІНС. Окрім цього обробка складних алгоритмів створює додаткові затримки в роботі, що може призвести до втрати стійкості системи.

Вібраційні рухи зазвичай здійснюються при високих частотах і потрібно піддавати жорсткому обліку всі зміни в русі об'єкта для успішного розв'язання навігаційної задачі. Сучасні інерціальні датчики можуть видавати первинну інформацію з частотою в декілька тисяч герц і для їх обробки на сьогодні існують такі обчислювачі як ПЛІС, які всю цю інформацію можуть обробити з такою ж, чи навіть вищою швидкістю.

Поява кінчного руху вже є джерелом похибки, оскільки виникає ряд складностей при його інтегруванні. Вони виникають через невірне математичне трактування самого руху і проявляються у невідповідності результатів інтегрування з істинним рухом об'єкта. Розглянемо детальніше саме поняття кінчного руху.

При кінчному русі вісь обертання постійно змінює напрямок. Тобто, одна з осей описує конус в просторі, як показано на рис. 1, де через  $T_0$  позначене початкове положення осей;  $T_4$  – кінцеве положення;  $T_1, T_2, T_3$ , – проміжні положення під час руху.

Це можна пояснити ще так: в результаті коливань з однаковою частотою по двох ортогональних осях з різними фазами виникає кінчна похибка. Наприклад, якщо по осям  $X$  і  $Y$  наявні синусоїдальні сигнали з різними фазами, то навколо осі  $Z$  виникає кінчний рух, що призводить до похибки.

Кутова швидкість чистого кінчного руху виражається наступним чином:

$$\omega = a\Lambda \cos(\Lambda t)i + b\Lambda \sin(\Lambda t)j, \quad (1)$$

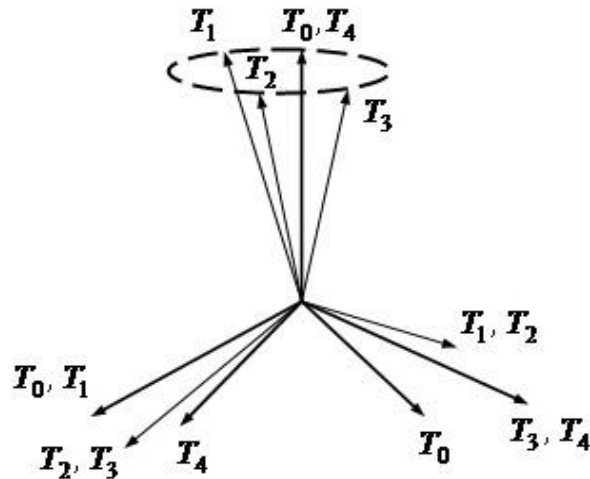


Рис. 1. Конічний рух

де  $a$  і  $b$  – амплітуди сигналу,  $\Lambda$  – частота сигналу,  $t$  – час,  $i$  і  $j$  – одиничні вектори, ортогональні і нормальні до осей Ейлера.

Основний вплив конічного руху на точність системи проявляється під час інтегрування кінематичних рівнянь руху. Для його демонстрації скористаємося алгоритмом кватерніонного подання цих рівнянь, який записується наступним чином:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Omega(\omega) q, \quad (2)$$

де  $q$  – кватерніон,  $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  – вектор кутової швидкості,  $\Omega(\omega)$  –  $4 \times 4$ -кососиметрична матриця, яка є функцією вектора кутової швидкості тіла у зв'язаній СК. Вираз для знаходження  $\Omega$  записується як:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -[\omega \times] \end{bmatrix}, \quad (3)$$

або інакше

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

При виникненні гармонічних кутових коливань навколо двох ортогональних осей  $X$  і  $Y$  однакових за частотою, але різних за фазою, в результаті інтегрування відносно третьої осі  $Z$  виникає збільшення кута, як видно з рис. 2, хоча фактичного руху відносно цієї осі виконано не було.

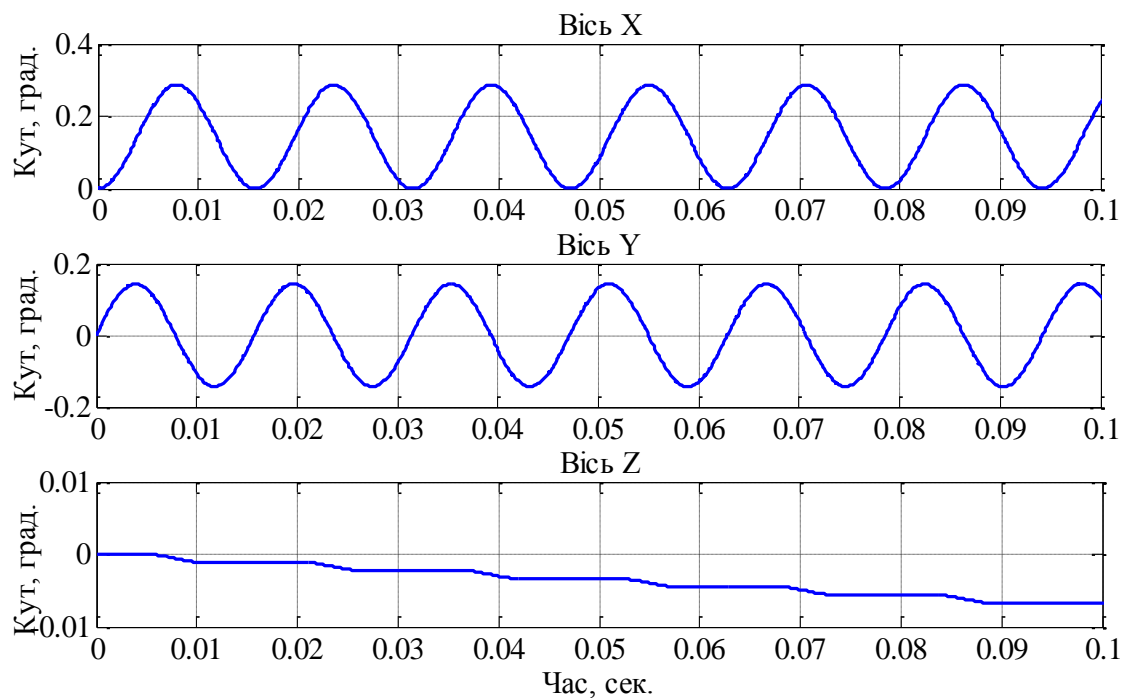


Рис. 2. Результати інтегрування кінематичних рівнянь в умовах кінцевого руху

Для визначення навігаційних параметрів об'єкта за допомогою БНС необхідно спроектувати вектор уявного прискорення для його подальшого інтегрування із зв'язаною з об'єктом системи координат в навігаційну [4], використовуючи дані про приріст кута з датчиків кутової швидкості, а, отже, виникнення ситуації з присутністю кінцевого руху спричинить до накопичення похибок при переході з однієї до іншої системи координат.

### Цифрове інтегрування кінематичних рівнянь ЛА

На сьогодні розроблена достатня кількість алгоритмів компенсації кінцевої похибки, розглянутих в роботах [3, 4, 5]. Однак виникає наступна проблема, що викликана цифровим інтегруванням.

Оскільки на бортовому обчислювачі, як і взагалі, на будь-якому обчислювачі фізично неможливо реалізувати математичний опис об'єкта в нескінченній формі, то використовують дискретну реалізацію всіх процесів, в тому числі і інтегрування. У цьому випадку інтегрування носить назву цифрового або чисельного.

Взагалі всі алгоритми компенсації кінцевого руху, реалізовані на бортових обчислювачах, подаються в дискретній формі з використанням дискретних вічетів вхідних сигналів з датчиків первинної інформації. Основним завданням дискретних алгоритмів є якомога більше наближення до опису істинного руху. І цього наближення можна досягти різними методами, які детальніше розглянемо далі.

Як уже зазначалося, на сьогодні розроблена достатня кількість конічних алгоритмів БІНС, але більшість з них було створено в часи, коли обчислювальна здатність комп'ютерів знаходилася на невисокому рівні в порівнянні з сьогоднішнім прогресом в комп'ютерній і обчислювальній техніці. Таким чином такі алгоритми створювалися з розрахунку зменшення навантаження на обчислювач в зв'язку з його невеликою пропускнуою здатністю того часу. Для цього вхідні сигнали представлялися у вигляді поліномів, виходячи з апріорних припущень про можливий рух носія [4, 5]. Точність роботи таких алгоритмів залежить від кількості усічених членів поліноміального ряду, тож для створення все більш точніших алгоритмів ускладнювалася їх структура, розроблялися алгоритми більш високого порядку з додатковими членами поліноміального ряду. Це дозволяло реалізувати ці алгоритми на обчислювачах з невеликою пропускнуою здатністю. Але апріорні припущення про можливий тип руху носія вже самі собою є джерелом похибок, адже, по-перше, неможливо математично точно описати істинний рух, а по-друге, не можна передбачити всіх факторів динамічного середовища, в яке потрапить носій. Тим більше в умовах високодинамічного середовища, якому піддається, наприклад, ракета або винищувач, потрібно якомога частіше отримувати інформацію про орієнтацію та інші навігаційні параметри.

В даній статті увага приділяється іншому методу наближення до опису істинного руху об'єкта.

Для вирішення поставленої задачі проводилося порівняння алгоритмів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь з [4], які для зручності будемо називати двох- і чотирьохкроковим алгоритмом Лебедева-Ткаченко, відповідно, а також звичайного алгоритму числового інтегрування, який назвемо алгоритмом Ейлера, що описується наступною формулою:

$$\hat{q}_{n+1} = \frac{T_s}{2} \Omega \hat{q}_n + K \varepsilon \hat{q}_n, \quad (5)$$

де  $\hat{q}_{n+1}$  – кватерніон орієнтації на наступному такті,  $T_s$  – період дискретизації,  $\Omega(\omega)$  – кососиметрична матриця,  $\varepsilon = 1 - (q_{0n}^2 + q_{1n}^2 + q_{2n}^2 + q_{3n}^2)$ ,  $K = 0.1$  – коефіцієнт, що керує нормою кватерніона.

Алгоритми Лебедева-Ткаченко використовують поліноміальне представлення вхідного сигналу і призначені зменшити навантаження на обчислювач при забезпеченні високої точності інтегрування. Алгоритм Ейлера не прив'язаний до типу вхідного сигналу, має простішу структуру і є менш точнішим.

Найбільша частота видачі первинної інформації сучасними датчиками, яку вдалося знайти в доступній літературі, становить 4 кГц, тож обмежимося цим значенням як максимально можливою частотою

дискретизації, тим більше сучасні засоби обчислення такі, як ПЛІС (FPGA), дозволяють проводити обробку інформації з такою частотою.

Для успішної компенсації кінчної похибки потрібно, щоб алгоритм інтегрування кінематичних рівнянь максимально точно відстежував зміну в положенні носія і особливо важливо відстежувати саму кінчну складову. Як згадувалося вище, кінчний рух породжений гармонічним коливальним рухом, тож для вибору максимальної частоти коливального руху виберемо значення 400 Гц, що є власною частотою багатьох вібропідставок. Таким чином видно, що найвища складова в спектрі вхідного сигналу ( $\omega_N$ ) і частота дискретизації ( $\omega_S$ ) відрізняються в 10 разів, що задовольняє умовам імпульсної теореми [6].

На рис. 3 показана похибка визначення кінчної складової навколо осі  $Z$  при наявності кутових гармонічних коливань, різних за фазою відносно осей  $X$  і  $Y$ . В даному випадку амплітуда коливань становить  $0.5 \text{ с}^{-1}$ , частота 400 Гц, а частота дискретизації – 2200 Гц, тобто  $\omega_S = 5.5\omega_N$ . Таке відношення частот вибране як початкове, оскільки в ході дослідження було встановлено, що при менших значеннях інтегрування сильно спотворюється, не описуючи істинного руху.

Як видно з рис. 3 за таких заданих значень двох- і чотирьохкрокові алгоритми Лебедева-Ткаченко мають більшу точність відносно номінального алгоритму в порівнянні з алгоритмом Ейлера. Похибка визначення орієнтації становить:

- для двохкрокового алгоритму Лебедева-Ткаченко:  $e = 0.0003603^\circ$ ;
- для чотирьохкрокового алгоритму Лебедева-Ткаченко:  $e = 0.0005462^\circ$ ;
- для алгоритму Ейлера:  $e = 0.0006268^\circ$ .

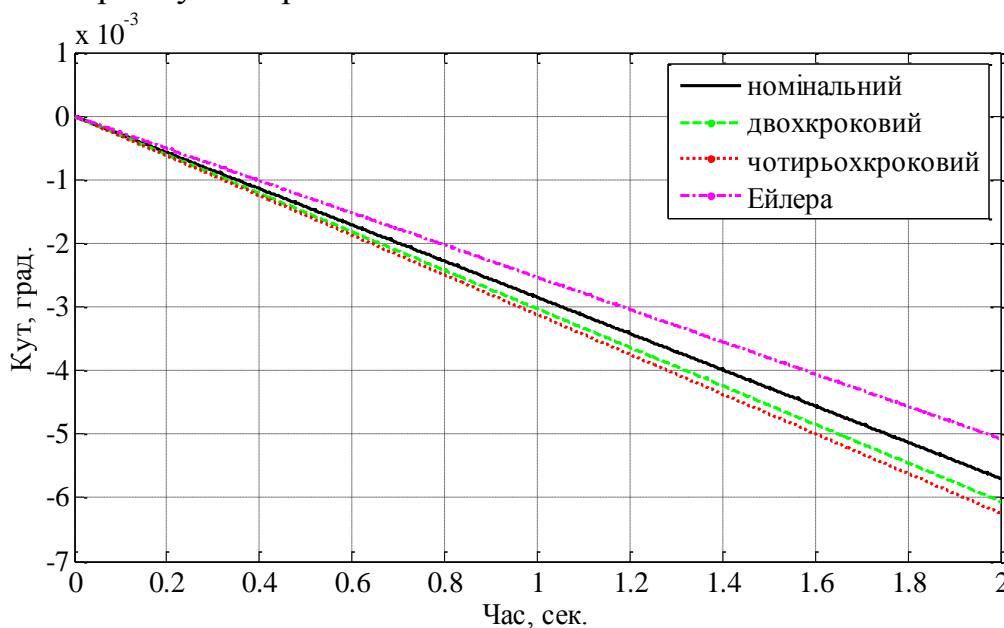


Рис. 3. Точність визначення кінчної складової при  $\omega_N = 400$  Гц і  $\omega_S = 2200$  Гц

Далі, при збільшенні частоти дискретизації до 4000 Гц ( $\omega_S = 10\omega_N$ ) видно, що, по-перше, точність усіх алгоритмів відносно номінального покращилася, по-друге, точність алгоритму Ейлера стала кращою за точність чотирьохкрокового алгоритму (рис. 4). В числових еквівалентах маємо наступні значення:

- для двохкрокового алгоритму Лебедева-Ткаченко:  $e = 0.0001693^\circ$ ;
- для чотирьохкрокового алгоритму Лебедева-Ткаченко:  $e = 0.0001944^\circ$ ;
- для алгоритму Ейлера:  $e = 0.0001816^\circ$

Таким чином, із збільшенням частоти дискретизації і, також, відношення  $\omega_S$  до  $\omega_N$ , спостерігається тенденція покращення точності визначення параметрів інтегрування кінематичних рівнянь за допомогою більш простішого алгоритму Ейлера по відношенню до алгоритмів Лебедева-Ткаченко.

Таким самим чином можна зробити точність алгоритму Ейлера навіть кращою, ніж у двохкрокового алгоритму. Для цього можемо варіювати зі зменшенням частоти гармоніки, оскільки раніше було вже встановлено максимальну частоту дискретизації.

Виберемо, наприклад, значення  $\omega_N = 200$  Гц, а решту параметрів залишимо незмінними, таким чином установивши  $\omega_S = 20\omega_N$ . Результати

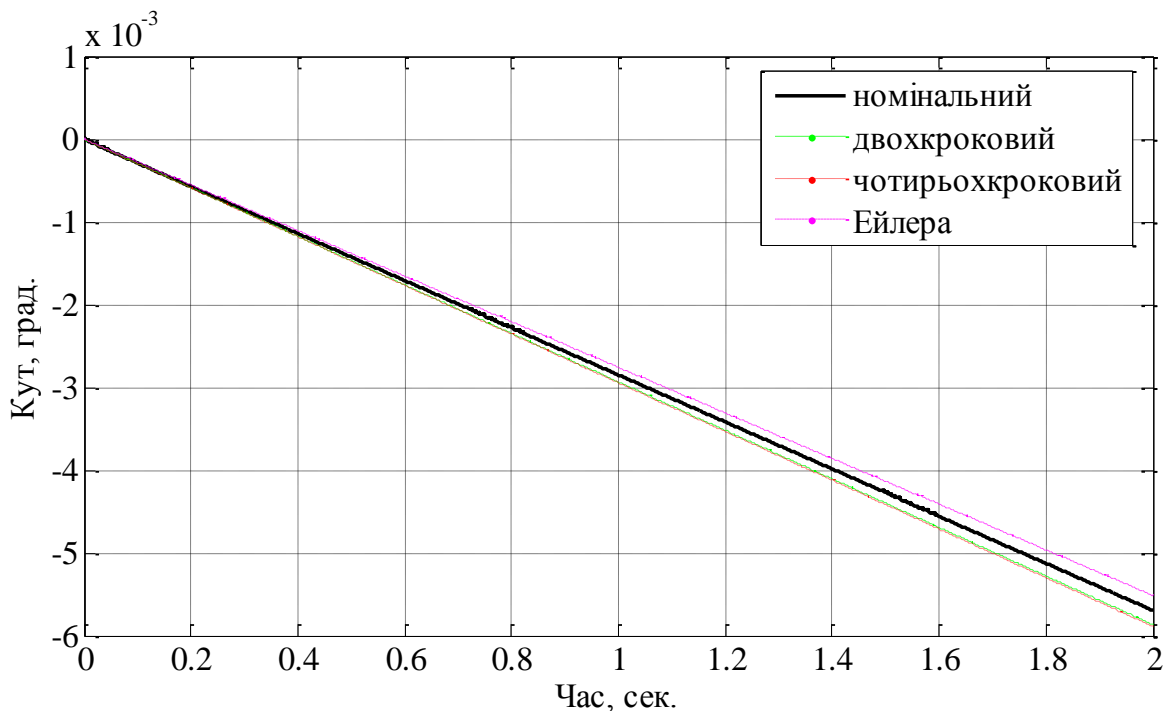


Рис. 4. Точність визначення кінчної складової при  $\omega_N = 400$  Гц і  $\omega_S = 4000$  Гц

модельовання покажемо на рис. 5. З графіка видно, що крива, отримана за допомогою інтегрування алгоритмом Ейлера знаходиться ближче до кривої номінального алгоритму. Числові значення кінчної складової встановляться на наступних рівнях:

для двохкрокового алгоритму Лебедева-Ткаченко:  $e = (9.775 \cdot 10^{-5})^\circ$ ;

для чотирьохкрокового алгоритму Лебедева-Ткаченко:  $e = 0.0001013^\circ$ ;

для алгоритму Ейлера:  $e = (8.668 \cdot 10^{-5})^\circ$ .

Крім того, покращення характеристик точності визначення орієнтації спостерігається не лише відносно кінчної складової, а й відносно інших двох кутів. Також в процесі дослідження було помітно досить суттєву залежність результатів алгоритмів Лебедева-Ткаченко від характеру вхідного сигналу, що менше спостерігалось у випадку алгоритму Ейлера.

Ще однією суттєвою перевагою чисельного інтегрування кінематичних рівнянь БНС за допомогою простішого алгоритму є те, що інформацію про орієнтацію об'єкта можна отримувати на кожному такті, в той час як складніші алгоритми видають інформацію лише через два і чотири такти, відповідно.

Здатність отримувати інформацію про орієнтацію якомога частіше при швидких змінах положення таких об'єктів як ракети або високоманеврові винищувачі має істотне значення для подальшої їх стабілізації і керування.

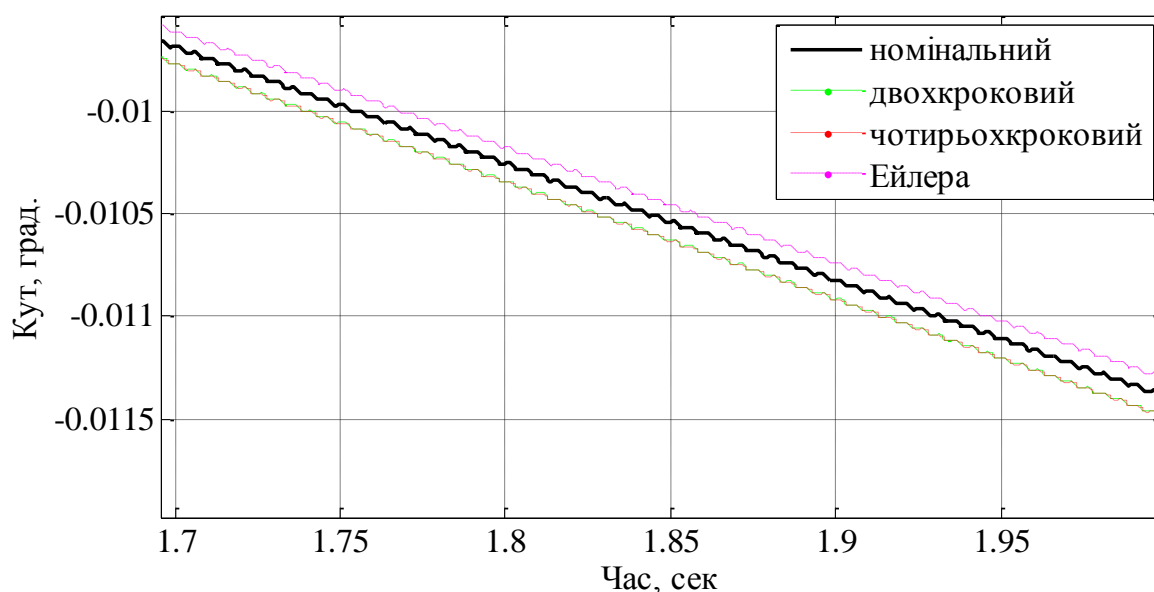


Рис. 5. Точність визначення кінчної складової при  $\omega_N = 200$  Гц і  $\omega_S = 4000$  Гц

## Висновок

В даній статті було підтверджено можливість використання простих алгоритмів чисельного інтегрування кінематичних рівнянь руху носія БНС в умовах наявності кінчного руху зі збереженням точності на рівні складніших алгоритмів і за рахунок підвищення частоти дискретизації до-



сягнуто покращення точності цих алгоритмів для застосування їх на високоманевровому носії.

### Список використаної літератури

1. *Бранец В.Н.* Введение в теорию безплатформенных инерциальных навигационных систем [Текст] // В. Н. Бранец, И.П.Шмыглевский/ – М.: Наука, 1992. – 280 с.
2. *Bortz J. E.* A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation [Text]// *J. E. Bortz* /IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – 1971. – Vol. 7, № 1. – P. 61-66.
3. *Savage P.G.* Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design. Part 1: Attitude Algorithms [Text] // *P. G. Savage* /Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1998. – Vol. 21, № 1. – P. 19–27.
4. *Системы инерциального управления. Алгоритмические аспекты* [Текст] / Д. В.Лебедев , А. И. Ткаченко ; отв. ред. Козорез В.В.; АН УССР. Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова. – Киев : Наук. думка, 1991. – 208 с.
5. *Панов А. П.* Математические основы теории инерциальной ориентации [Текст] // *А. П. Панов* /– Киев : Наук. думка, 1995. – 280 с.
6. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления [Текст] // *Б.Куо*/Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.