

УДК 531.45

**М. Г. Головка, О. Ю. Орлянський**

## **АЛЬТЕРНАТИВНІ ПІДХОДИ ДО ВВЕДЕННЯ КОЕФІЦІЄНТУ ТЕРТЯ КОЧЕННЯ**

### **Вступ**

У механіці та техніці важливу роль відіграють сили зовнішнього тертя, що характеризуються відповідними коефіцієнтами. Виділяють коефіцієнти тертя спокою, тертя ковзання та тертя кочення. Якщо у перших двох випадках коефіцієнти є безрозмірними, то коефіцієнт тертя кочення є розмірним. Це означає, що він має визначатися через геометричні

та фізичні характеристики тіл, які беруть участь у процесі кочення. Метою даної роботи є розгляд простих теоретичних моделей, які дозволяють ввести безрозмірний коефіцієнт тертя кочення. Необхідно зазначити теоретичну складність проблеми зовнішнього тертя взагалі, про що свідчить незначний прогрес у цьому питанні, та наявність доволі екзотичних спроб пояснення механізмів дисипації енергії. Наприклад, згідно з роботою [1] сила тертя кочення має бути пропорційна швидкості руху на зразок сили внутрішнього тертя. Зрозуміло, що подібні висновки викликають сумніви, оскільки така залежність була б обов'язково виявлена в численних експериментах.

### Стандартні визначення коефіцієнту тертя кочення

У технічній англійській літературі, зокрема пов'язаній із колісним транспортом, під коефіцієнтом тертя кочення розуміють відношення сили тертя кочення до сили нормального тиску [2], аналогічно коефіцієнту тертя ковзання. Визначений таким чином коефіцієнт є безрозмірним, але залежним не тільки від фізичних властивостей матеріалів, але й від радіусу колеса.

Спроба відокремити внесок радіусу призвів до найбільш поширеного на сьогодні визначення коефіцієнту тертя кочення, як деякої відстані  $d$  між центром тіла, що котиться, та лінією ефективної дії нормальної сили опори  $N$  (рис. 1). Для рівномірного руху момент цієї сили  $Nd$  відносно центру компенсується моментом сили тертя кочення  $F_T R$ , звідки й отримуємо відому формулу

$$F_T = d \frac{N}{R}. \quad (1)$$

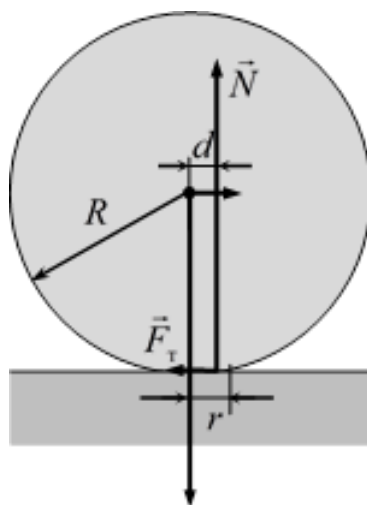


Рис. 1. Розмірний коефіцієнт тертя кочення  $d$

**Модель перша: рівномірний розподілу тиску у зоні дотику**

Ідея була запропонована Русланом Садовським. Він припустив, що коефіцієнт тертя  $d$  залежить від модуля Юнга  $E$  та сили реакції опори  $N$ , і знайшов таку залежність методом розмірностей. Підставляємо розмірності  $d$ ,  $E$ ,  $N$  у гіпотетичну залежність

$$d = CE^a N^b,$$

де  $C$  – безрозмірний множник, що претендує на роль нового коефіцієнту тертя кочення, і прирівнюємо показники степенів при однакових основних одиницях виміру:

$$\begin{cases} \text{м:} & 1 = -a + b \\ \text{с:} & 0 = 2a + 2b \\ \text{кг:} & 0 = a + b \end{cases}$$

Незважаючи на те, що кількість рівнянь перевищує кількість невідомих, система виявляється сумісною і має розв'язок:  $a = -1/2$ ,  $b = 1/2$ . Отже, якщо навіть розглянути залежність  $d$  від додаткової величини, наприклад такої, як густина  $\rho$ , матимемо той самий результат:

$$d = C \sqrt{\frac{N}{E}}. \quad (2)$$

З урахуванням (1) формула для сили тертя кочення набуває вигляду:

$$F_{\tau} = C \frac{N^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{ER}}, \quad (3)$$

де  $R$  – радіус кулі. Для колеса або циліндру наведене обґрунтування формули (2) є незадовільним, оскільки не враховує ще один геометричний параметр – ширину колеса або довжину циліндра. Зазначимо також, що у випадку різних матеріалів кулі та поверхні кочення, під модулем Юнга слід розуміти деяке ефективне значення, залежне щонайменше від модулів Юнга обох матеріалів.

Вираз (3) для сили тертя кочення можна отримати й без використання теорії розмірностей. Ідеалізована куля має з площиною одну точку дотику. Для справжньої кулі це не можливо навіть не стільки внаслідок не ідеальності поверхонь, скільки від їх деформування у зоні контакту. Під дією зовнішньої сили, наприклад, сили тяжіння, площа контакту збільшуватиметься до тих пір, поки тиск між поверхнями не зменшиться до деякого характерного значення, пов'язаного з пружними властивостями матеріалу і модулем Юнга.

Розглянемо випадок руху пружної кулі по твердій поверхні. Припустимо, що тиск в області контакту характеризується деяким середнім зна-

***Механіка елементів конструкцій***

ченням  $P$ , пропорційним модулю Юнга речовини кулі  $E$ , а ефективне зміщення  $d$  точки прикладання результуючої сили нормальної реакції опори пропорційне радіусу області контакту  $r$  (Рис.1). Сила реакції опори дорівнює добутку середнього тиску на площу області контакту

$$N = \pi r^2 P \propto E d^2,$$

звідки знаходимо вирази для розмірного коефіцієнту тертя

$$d = C \sqrt{\frac{N}{E}}$$

і сили тертя

$$F_{\tau} = C \frac{N^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{ER}}.$$

Таким чином, ми отримали вирази, ідентичні (2) і (3).

Якщо тепер розглянути кочення твердої кулі по пружній поверхні, то з аналогічних міркувань знаходимо, що сила тертя кочення має вигляд

$$F_{\tau} = C' \frac{N^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{E'R}}, \quad (4)$$

де  $E'$  – модуль Юнга речовини поверхні,  $C'$  – безрозмірний множник, який може бути відмінним від  $C$ .

Загальний випадок кочення пружної кулі по пружній поверхні у межі  $E' \rightarrow \infty$  або  $E \rightarrow \infty$  повинен давати, відповідно, вирази (3) або (4). Таким чином, можна припустити, що формула для сили тертя кочення має вигляд:

$$F_{\tau} = C \frac{N^{\frac{3}{2}}}{R} \sqrt{\frac{\alpha}{E} + \frac{\beta}{E'}},$$

де  $\alpha, \beta$  – деякі безрозмірні сталі, що характеризують матеріали і, можливо, геометрію поверхонь. Як бачимо, величину сили тертя кочення насамперед визначає матеріал з найменшим модулем Юнга. Можна ввести ефективний модуль Юнга для двох речовин:

$$\frac{1}{E_{ef}} = \frac{\alpha}{E} + \frac{\beta}{E'}. \quad (5)$$

Тоді сила тертя кочення набуває остаточного вигляду:

$$F_{\tau} = C \frac{N^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{E_{ef}} R}.$$

## Застосування першої моделі для циліндру

Розглянемо кочення пружного циліндру радіусом  $R$  і довжиною  $L$  по твердій поверхні. Припустимо, що зона контакту має вигляд вузької прямокутної смужки, довжиною  $L$  і шириною  $2r$ , а розмірний коефіцієнт тертя кочення  $d$ , як у випадку кулі, пропорційний  $r$ .

Знову добуток середнього значення тиску на площу смужки дорівнює силі нормальній реакції опори  $N = 2rLP \propto ELd$ , звідки знаходимо розмірний коефіцієнт

$$d = C \frac{N}{EL}, \quad (6)$$

а з урахуванням (1) і силу тертя кочення

$$F_T = C \frac{N^2}{ERL}. \quad (7)$$

Якщо розглянути кочення твердого циліндра по пружній поверхні, то з міркувань, аналогічних тим, що наведені вище, отримуємо силу тертя кочення у вигляді

$$F_T = C' \frac{N^2}{ERL}. \quad (8)$$

Для кочення пружного циліндра по пружній поверхні, з огляду на граничні ідеалізовані випадки (7) і (8), вводимо ефективний модуль Юнга (5) і отримуємо остаточну формулу

$$F_T = C \frac{N^2}{E_{ef}LR}.$$

Таким чином, модель, що базується на усередненому тиску в області контакту, дає нові вирази для сили тертя кочення кулі та циліндру з безрозмірними множниками. Ці множники можуть використовуватись як безрозмірні коефіцієнти тертя кочення.

Недоліком розглянутої моделі є те, що вона ґрунтується на усереднених значеннях тиску в матеріалах у зоні контакту і не враховує суттєву нерівномірність розподілу тиску. Для отримання більш точної моделі слід врахувати розподіл тиску в матеріалах поблизу області контакту. Для цього можна використати результат розв'язання задачі Герца [3] для контакту пружних сфери та напівпростору і циліндру та напівпростору, в яких цей розподіл тисків врахований.

**Модель друга: розподіл тиску у зоні дотику за Герцом**

У цій моделі вважається, що під час кочення тіл (з невеликою швидкістю) у першому наближенні можна користуватися розподілом тиску у

зоні контакту для нерухомих тіл. Остання задача була розв'язана Генріхом Герцом у 1882 р.

Для дотику кулі та напівпростору форма поверхні контакту це коло, що має радіус

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{NR}{E_{ef}}},$$

де

$$\frac{1}{E_{ef}} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \quad (9)$$

$\nu_1, \nu_2, E_1, E_2$  – коефіцієнти Пуассона та модулі Юнга відповідних речовин.

Вважаючи ефективне зміщення  $d$  пропорційним радіусу області контакту  $r$ , отримуємо вираз для розмірного коефіцієнту тертя

$$d = C \sqrt[3]{\frac{NR}{E_{ef}}} \quad (10)$$

і сили тертя кочення:

$$F_{\tau} = C \frac{N^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{E_{ef} R^2}}.$$

У випадку дотику циліндра довжиною  $L$  та напівпростору форма поверхні контакту це вузька прямокутна смужка, половина ширини якої

$$r = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{NR}{E_{ef} L}}.$$

Знову вважаємо, що ефективне зміщення  $d$  пропорційне  $r$ . Тоді

$$d = C \sqrt{\frac{NR}{E_{ef} L}}, \quad (11)$$

$$F_{\tau} = C \frac{N^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{E_{ef} RL}}.$$

### Обчислення значень безрозмірних коефіцієнтів

У роботі «Елементарний розгляд теплового руху молекул у твердих тілах» Альберт Ейнштейн зауважив, що «безрозмірні чисельні множники (як в нашому випадку  $C$ ), значення яких можна знайти тільки за допомогою більш-менш деталізованої математичної теорії, за порядком величини зазвичай дорівнюють одиниці». Проаналізуємо отримані альтернативні ви-

рази для безрозмірних коефіцієнтів кочення з цієї точки зору. Зазначимо, що близьке до одиниці значення безрозмірних коефіцієнтів пояснюється двома чинниками. По-перше, фізичні закони формулюють найпростішим чином. Будь-які відмінні від одиниці коефіцієнти включають у розмірні константи. По-друге, і це вже не залежить від людських уподобань, закони природи мають простий математичний вираз. Не існує дуже великих або малих показників степенів, які б у процесі диференціювання або інтегрування могли суттєво вплинути на безрозмірні коефіцієнти. Тому й виходить, що випадки, коли коефіцієнт відрізняється від одиниці більш ніж на три порядки, як зауважив Ейнштейн, «безперечно, рідкісні».

При моделюванні кочення куль та циліндрів було отримано чотири вирази для сили тертя кочення. Проаналізуємо їх та зіставимо з експериментальними даними. Для цього обчислимо безрозмірні коефіцієнти тертя кочення, виразивши їх через розмірні, відомі з довідкової літератури. При оцінюванні будемо брати ефективні значення модуля Юнга, розраховані за формулою (9) для обох теоретичних моделей.

Необхідність обчислення значень безрозмірних коефіцієнтів обумовлена ще й тим, що в «деталізованій математичній теорії» ці коефіцієнти мають мати однакове значення. У нашому, дуже наближеному підході, бажано, щоб ці коефіцієнти не дуже відрізнялися один від одного.

Складність полягає в тому, що у довідковій літературі зазвичай відсутня будь-яка інформація про умови вимірювання. Використання стандартної формули (1) для сили тертя кочення неявно припускає, що залежність від навантаження  $N$  і радіусу  $R$  вже врахована, і розмірний коефіцієнт тертя  $d$  є характеристикою лише фізичних властивостей двох тіл.

З наведеного вище аналізу виявляється, що це не так в усіх чотирьох випадках.

Будемо використовувати позначення з індексом «1» для результатів першої моделі та індексом «2» – для другої.

Для кочення кулі з формул (2) та (10) маємо такі безрозмірні коефіцієнти

$$C_{1к} = d \sqrt{\frac{E_{ef}}{N}}, \quad (12)$$

$$C_{2к} = d^3 \sqrt{\frac{E_{ef}}{NR}}. \quad (13)$$

Для кочення циліндру з (6) та (11) маємо:

$$C_{1ц} = \frac{dE_{ef}L}{N}, \quad (14)$$

$$C_{2ц} = d \sqrt{\frac{E_{ef} L}{NR}}. \quad (15)$$

Для розрахунків коефіцієнтів кочення куль були взяті дані [4], оскільки вони супроводжувалися посиланням на Держстандарт [5] з описом вимірювань. Виявилось, що кульки мали радіуси 6 мм і були додатково навантажені спеціальним пристроєм. Хоча в [5] не було вказано при яких навантаженнях проводились вимірювання, це вдалося встановити завдяки наведеним розмірам та матеріалам. Результати обчислень наведені у табл.1.

Таблиця 1.

Значення безрозмірних коефіцієнтів для куль

Матеріал кулі	Матеріал поверхні	$d$ , мкм	$E_{ef}$ , ГПа	$N$ , Н	$R$ , мм	$C_{1к}$ , $10^{-1}$	$C_{2к}$ , $10^{-2}$
Сталь ШХ-15	Сталь ШХ-15	2,2	116	13	6	2,1	2,5
Сталь ШХ-15	Мідь	60	81	1	6	47	60
Сталь ШХ-15	Скло	50	56	13	6	33	45
Сталь ШХ-15	Кремній	30	78	13	6	23	30

Як бачимо з табл.1, безрозмірні коефіцієнти, розраховані згідно двох моделей за формулами (12) і (13), є близькими до одиниці і задовольняють критерію Ейнштейна, відрізняючись між собою лише на порядок.

При обчисленні коефіцієнтів для циліндрів вважатимемо, що котяться суцільні циліндри без додаткового навантаження. Звісно, це не більше, ніж оцінка, але точніша інтерпретація у переважній більшості випадків неможлива.

Якщо вважати, що котиться однорідний циліндр без додаткового навантаження, сила  $N$  буде дорівнювати силі тяжіння, і тоді вираз для безрозмірного коефіцієнту (14) у першій моделі не залежатиме від довжини циліндра:

$$C_{1ц} = \frac{dE_{ef}L}{N} = \frac{dE_{ef}L}{\pi R^2 L \rho g} = \frac{dE_{ef}}{\pi R^2 \rho g}.$$

Виявляється, не залежить від довжини циліндра і безрозмірний коефіцієнт (15) у другій моделі:

$$C_{2ц} = d \sqrt{\frac{E_{ef}L}{NR}} = d \sqrt{\frac{E_{ef}L}{\pi R^3 L \rho g}} = d \sqrt{\frac{E_{ef}}{\pi R^3 \rho g}}.$$



Користуючись довідковими даними [6], [7], і оцінюючи радіус у 40 см (середній радіус залізничного колеса), отримуємо наведені у табл. 2 значення безрозмірних коефіцієнтів тертя кочення для обох моделей.

**Таблиця 2.**

Значення безрозмірних коефіцієнтів для циліндрів

Матеріал циліндра	Матеріал поверхні	$d$ , мм	$E_{\text{эф}}$ , ГПа	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$R$ , см	$C_{1\text{ц}}$ , 10 <sup>3</sup>	$C_{2\text{ц}}$
Сталь	Сталь	0,5	114	7,8	40	11	3,7
Сталь	Деревина	2	10	7,8	40	7,2	6,0
Деревина	Сталь	0,35	19	0,64	40	15	3,6
Деревина	Деревина	0,8	19	0,64	40	19	6,2
Чавун	Сталь	1,2	77	7,1	40	19	7,6

Для циліндрів безрозмірні коефіцієнти відрізняються більш ніж на три порядки, і завелике значення коефіцієнту  $C_{1\text{ц}}$  першої моделі ставить відповідну йому формулу (14) під сумнів.

### Аналіз отриманих результатів

Отримані значення безрозмірних коефіцієнтів тертя кочення дозволяють зробити висновок стосовно того, які моделі, імовірно, відповідають дійсності, а які – ні. Оскільки у переважній більшості фізичних співвідношень значення безрозмірних коефіцієнтів належать інтервалу від  $10^{-2}$  до  $10^2$ , робимо висновок, що друга модель нерівномірного розподілу тиску за Герцом дає чудові результати як для кочення кулі ( $C_{2\text{к}} \approx 0,4$ ), так і для кочення циліндру ( $C_{2\text{ц}} \approx 5$ ). Що стосується першої моделі, її результат для кочення кулі виглядає переконливо ( $C_{1\text{к}} \approx 3$ ), але для кочення циліндру викликає сумнів: безрозмірний коефіцієнт набуває дуже великих значень ( $C_{1\text{ц}} \approx 10^4$ ). Чи означає це, що від першої моделі слід відмовитись? Мабуть, що ні. Остаточне слово має сказати експеримент. Великі значення  $C_{1\text{ц}}$  можна спробувати пояснити невідповідністю теорії та експерименту. Навряд чи поверхні коліс і колії настільки рівні, щоб між ними утворилася прямокутна тоненька смужка дотику, як в ідеалізованому випадку задачі Герца. Якщо ж уявити цю смужку у вигляді ланцюжка плям, що можуть наповзати одна на одну та перекриватися, матимемо дещо іншу задачу. Знайдемо, що у випадку невеликого навантаження і не достатньо ретельно підготовлених поверхонь, такі плями можуть вважатися уособленими, і тоді до циліндричних тіл слід застосовувати формулу для еліптичної зони дотику, яка має такі ж степеневі залежності, що й формула для куль. Так застосування до циліндричних поверхонь (табл. 2) формули (12), що була

отримана у першій моделі для кулі, і дає значення безрозмірного коефіцієнту  $C_1$  порядку одиниці.

### **Висновки**

Існування розмірного коефіцієнту тертя качення є суттєвим недоліком і вимагає відокремлення від нього як фізичних властивостей матеріалів тіл, так і зовнішніх чинників. Запропонований у роботі динамічний підхід до введення безрозмірного коефіцієнта тертя качення базується на використанні характерного розміру області контакту. У рамках цього підходу природнім чином виникають дві прості теоретичні моделі, що демонструють життєздатність та конкурентоспроможність. Значення безрозмірних коефіцієнтів, які виникають у цих моделях, прийнятно характеризують силу тертя качення. Для подальшого аналізу моделей та встановлення реальної залежності необхідні цілеспрямовані експериментальні дослідження.

### **Список використаної літератури**

1. *Булъгин В. С.* Трение качения как вязкоупругий диссипативный процесс // Прикладная механика и техническая физика, 2001, т.42, №3.
2. Tires and Passenger Vehicle Fuel Economy: Informing Consumers, Improving Performance – Special Report 286. National Academy of Sciences, Transportation Research Board, 2006. URL: <http://onlinepubs.trb.org/onlinepubs/sr/sr286.pdf> - (17.04.2015)
3. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
4. Коэффициент трения качения, определенный стандартным методом по ГОСТ 23.214-83 по затуханию колебаний маятника со сферической опорой из стали ШХ 15. Сталь, медь, стекло, кремний // Электронный справочник DPVA. URL: <http://www.dpva.info/Guide/GuidePhysics/Frication/RollingFriction5/> - (17.04.2015)
5. *Карасик И. И., Трущин В. В., Самойлова Н. Н.* и др. Методы экспериментальной оценки коэффициента трения // ГОСТ 27640-88 СССР
6. Обзор: Коэффициенты трения качения // Электронный справочник DPVA. URL: <http://www.dpva.info/Guide/GuidePhysics/Frication/FrictionOfRolling/> - (17.04.2015)
7. *Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г.* Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1972 – 255с.