

УДК 622.248

К. Г. Левчук

## **ВПЛИВ ОБВАЖЕНИХ БУРИЛЬНИХ ТРУБ НА СПЕКТР ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ БУРИЛЬНОГО ІНСТРУМЕНТУ**

### **Вступ**

Поздовжні коливання бурильної колони (БК) обмежують надійність бурового обладнання. Вони сповільнюють буріння, а також можуть привести до відривання долота від породи, що зазвичай приводить до удару і, як наслідок, зниження довговічності роботи долота або пошкодження наземного обладнання. Основним джерелом таких коливань є вібрація низу бурильної колони (ВНБК) [1]. Критерії появи поздовжніх коливань в результаті взаємодії долота з породою отримані в [2]. Частотна характеристика взаємодії долота з породою покладена в основу досліджень в [3]. У роботі [4] запропоновано спосіб оцінювання впливу вібрації БК на її міцність, що може стати причиною виходу з ладу всієї БК.

Коливальні пружні деформації БК залежать від конструктивних, технологічних і експлуатаційних характеристик бурової установки [5], [6]. Відомі спроби моделювання поздовжніх коливань бурильної колони [7]. Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених задачам про небажані вібрації в процесі буріння, цілісного уявлення про залежність частотного спектру від параметрів БК не сформовано. Автори статті на основі розробленої ними математичної моделі БК [8], узагальнивши її для  $n$ -розмірної бурильної колони, аналітично отримали частотне рівняння її коливань.

Система диференціальних рівнянь, що описують коливальні процеси БК, не має точного аналітичного розв'язання. Разом з тим можливості аналітичних методів дослідження динаміки БК обмежені, досить трудомісткі та тривалі в часі, тому доцільно застосовувати спеціалізоване програмне забезпечення [9] – [11]. Комп'ютерні математичні пакети дозволяють скорочувати терміни проектування та аналізу, підвищувати якість розроблення моделей механічних систем і моделювання процесів, що відбуваються в цих системах.

### **Постановка задачі**

Запропонована стаття присвячена розробці алгоритму визначення власних частот багаторозмірних компоновок БК та встановлення залежності частотного спектру пружних коливань бурильної колони від технологічних параметрів обтяженої бурильної труби (ОБТ).

Задача дослідження – на основі розробленої математичної моделі [8] динаміки поздовжніх коливань бурильної колони дослідити вплив технологічних параметрів ОБТ на частоту коливань низу БК.

Вивчення динамічних режимів коливального руху БК ґрунтується на застосуванні чисельних методів розв'язку та методів математичного і функціонального аналізів. Для розробки практичних рекомендацій раціонального вибору технологічних й геометричних параметрів БК використані методи аналізу результатів моделювання динамічних процесів у бурильній колоні.

### Система динамічних рівнянь руху

Динамічні рівняння руху БК описуються теорією локальних деформацій. Для розв'язування цих рівнянь математичної фізики (системи одновірних хвильових рівнянь) був застосований аналітичний метод Фур'є, а рівняння пружних деформацій поточних перерізів БК отримані за допомогою методів математичного і фізичного моделювання із застосуванням комп'ютерних математичних пакетів.

Бурильну колону подамо у вигляді  $n$  секцій циліндричної форми довжинами  $l_i$  з поперечними перерізами  $F_i$  і густиною матеріалу  $\rho_i$ , з якого виготовлені бурильні труби. Будемо вважати, що всі сили діють вздовж осей цих стрижнів  $O_i x_i$  з початком у точках  $O_i$  – верхніх перерізах секцій БК, а поперечні перерізи стрижнів переміщуються поступально вздовж зазначених осей. Зазвичай, це припущення справедливе, оскільки поперечні розміри стрижнів малі порівняно з їхніми довжинами, а також величини сил, що діють вздовж осей стрижнів, незначні.

Рівняння руху поточних перерізів  $i$ -ої секції БК у поздовжньому напрямку подамо у вигляді

$$\ddot{u}_i(x_i, t) + 2h_i \dot{u}_i(x_i, t) - a_i^2 u_i''(x_i, t) = g, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1)$$

де  $h_i = \frac{\alpha}{2\rho_i F_i l_i}$  – зведений коефіцієнт опору ( $\alpha$  – коефіцієнт опору);

$\ddot{u}_i(x_i, t) = \frac{\partial^2 u_i(x_i, t)}{\partial t^2}$ ;  $\dot{u}_i(x_i, t) = \frac{\partial u_i(x_i, t)}{\partial t}$ ;  $a_i = \sqrt{\frac{E}{\rho_i}}$  – швидкість розпов-

сюдження пружної хвилі по стрижню ( $E$  – модуль пружності Юнга);

$u_i''(x_i, t) = \frac{\partial^2 u_i(x_i, t)}{\partial x_i^2}$ ;  $g$  – прискорення вільного падіння.

До динамічних рівнянь руху бурильної колони додамо крайові умови її руху. Запишемо крайові умови БК на кінцях і стику секцій труб. Рух вер-

хнього кінця ( $x_1 = 0$ ) зумовлений поступальним рухом елементів талевої системи  $u_1(0, t)$  масою  $m_0$  і жорсткістю  $c_0$ .

$$EF_1 u_1'(0, t) - c_0 u_1(0, t) = m_0 [a_1^2 u_1''(0, t) - g]. \quad (2)$$

На верхньому торці першої секції аварійної компоновки бурильної колони (рис. 1, а)

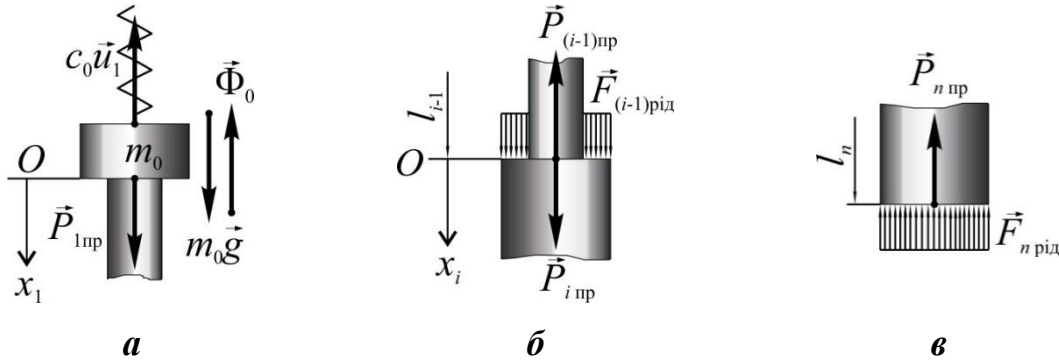


Рис. 1. Крайові умови бурильної колони

На межах сусідніх секцій БК деформації однакові, тому в місці контакту секцій бурильної колони (рис. 1, а і б)

$$u_i(l_i, t) = u_{i+1}(0, t), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (3)$$

Сили пружності на межах сусідніх секцій БК врівноважуються силами взаємодії БК з промивальною рідиною (рис. 1, а і б)

$$F_i u_i'(l_i, t) = F_{i+1} u_{i+1}'(0, t) + \frac{q}{E} (F_{i+1} - F_i) g \sum_{j=1}^i l_j, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (4)$$

На нижньому кінці БК сила пружності  $n$ -ої секції врівноважується силою взаємодії БК з промивальною рідиною

$$u_n'(l_n, t) = -\frac{q}{E} g \sum_{j=1}^n l_j. \quad (5)$$

### Рівняння частот бурильної колони

Першим етапом дослідження динамічних режимів роботи механічних систем є знаходження власних частот і форм коливань. Рівняння частот коливань БК отримують із загального розв'язку системи однорідних диференціальних рівнянь, що відповідають системі неоднорідних рівнянь (1)

$$\ddot{u}_i(x_i, t) + 2h_i \dot{u}_i(x_i, t) - a_i^2 u_i''(x_i, t) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (6)$$

з однорідними крайовими умовами, що відповідають неоднорідним (2)-(5)

$$EF_1 u_1'(0, t) - c_0 u_1(0, t) = m_0 a_1^2 u_1''(0, t); \quad (7)$$

$$u_i(l_i, t) = u_{i+1}(0, t), \quad i = \overline{1, n-1}; \quad (8)$$

$$F_i u_i'(l_i, t) = F_{i+1} u_{i+1}'(0, t), \quad i = \overline{1, n-1}; \quad (9)$$

$$u_n'(l_n, t) = 0. \quad (10)$$

Поставлену задачу шукатимемо за методом Фур'є, тобто запишемо загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$u_i(x_i, t) = X_i(x_i) \cdot T_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Щоб розділити змінні, підставимо (11) в (6), і отримаємо співвідношення

$$\frac{\ddot{T}_i(t) + 2h_i \dot{T}_i(t)}{T_i(t)} = \frac{EX_i''(x_i)}{\rho_i X_i(x_i)} = \text{const} = -p^2, \quad (12)$$

які розпадаються на два незалежних диференціальних рівняння, загальний розв'язок яких

$$\begin{aligned} X_i(x_i) &= A1_i \sin(px_i/a_i) + A2_i \cos(px_i/a_i); \\ T_i(t) &= e^{-h_i t} \left[ B1_i \sin\left(t\sqrt{p^2 - h_i^2}\right) + B2_i \cos\left(t\sqrt{p^2 - h_i^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Шляхом підстановки виразів (13) у крайові умови (7)-(9) отримуємо наступну систему рівнянь

$$A1_1 F_1 \sqrt{E\rho_1} - c_0 A2_1 = -m_0 p^2 A2_1; \quad (14)$$

$$A1_i \sin(pl_i/a_i) + A2_i \cos(pl_i/a_i) = A2_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

$$F_1 \sqrt{\rho_1} \left[ A1_1 \cos(pl_1/a_1) - A2_1 \sin(pl_1/a_1) \right] = F_2 \sqrt{\rho_2} A1_2; \quad (15)$$

$$F_i \sqrt{\rho_i} \left[ A1_i \cos(pl_i/a_i) - A2_i \sin(pl_i/a_i) \right] = F_{i+1} \sqrt{\rho_{i+1}} A1_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$A1_n \cos(pl_n/a_n) - A2_n \sin(pl_n/a_n) = 0. \quad (16)$$

Прирівнявши до нуля визначник системи  $n$  рівнянь (14)-(16), отримуємо рівняння частот.

Для дворовмірної БК ( $n = 2$ )

$$\begin{aligned} &F_1 \sqrt{\rho_1} \left[ c_0 - m_0 p^2 - F_1 p \sqrt{E\rho_1} \operatorname{tg}(pl_1/a_1) \right] = \\ &= F_2 \sqrt{\rho_2} \left[ (c_0 - m_0 p^2) \operatorname{tg}(pl_1/a_1) + 1 \right] \operatorname{tg}(pl_2/a_2); \end{aligned} \quad (17)$$

для трирозмірної БК ( $n = 3$ )

$$\begin{aligned}
 & F_1 \sqrt{\rho_1} \left[ c_0 - m_0 p^2 + F_1 p \sqrt{E \rho_1} \operatorname{tg}(pl_1/a_1) \right] \times \\
 & \times \left[ F_2 p \sqrt{\rho_2} \operatorname{tg}(pl_3/a_3) - F_3 p \sqrt{\rho_3} \operatorname{tg}(pl_2/a_2) \right] = \\
 & = F_2 \sqrt{\rho_2} \left[ (c_0 - m_0 p^2) \operatorname{tg}(pl_1/a_1) + F_1 p \sqrt{E \rho_1} \right] \times \\
 & \times \left[ F_2 p \sqrt{\rho_2} \operatorname{tg}(pl_2/a_2) \operatorname{tg}(pl_3/a_3) + F_3 \sqrt{\rho_3} \right].
 \end{aligned} \tag{18}$$

З частотного рівняння знаходимо  $p_k$  – частотний спектр коливань БК.

### Дослідження впливу параметрів обтяженої бурильної труби на частоти бурильної колони

Рівняння частот (17), (18) – трансцендентні, які не мають розв’язків в елементарних функціях, однак містять тригонометричні функції, що є періодичними. Отже, розв’язок цих рівнянь має нескінченну кількість коренів. Частотний спектр можна визначати аналітично за допомогою наближених методів (малого параметра, послідовних наближень, асимптотичні, Релея, Рітца, Бубнова-Гальоркіна, кінцевих різниць або елементів, динамічних жорсткостей або податливостей) [12], більшість з яких реалізовані у чисельних комп’ютерних пакетах символічної математики [13].

Відразу зазначимо, що частоти коливань БК не кратні першій – основній частоті. Їх кратність у значній мірі залежить від параметрів ОБТ.

Дослідження частотного спектра проводились для дворовмірної БК за наступними вихідними даними:  $m_0 = 9855$  кг – зведена маса талевої системи;  $c_0 = 53$  МН/м – коефіцієнт жорсткості талевої системи;  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа – модуль пружності Юнга;  $D_1 = 139,7$  мм,  $d_1 = 117,7$  мм – зовнішній і внутрішній діаметри,  $F_1 = 4448$  мм<sup>2</sup> – площа поперечного перерізу,  $l_1 = 1400$  м – довжина бурильних труб першої секції БК. Параметри ОБТ, що вибирались згідно [14], наведені у таблиці.

**Таблиця 1.**

Основні параметри обтяжених бурильних труб

Зовнішній $D$	Внутрішній $d$	Площа перерізу $F_2$ , см <sup>2</sup>	Маса однієї труби, кг	Маса 1м труби $m_2$ , кг/м	Густина $\rho_2$ , кг/м <sup>3</sup>
діаметр, мм					
139,7	57,2	$F1 = 127,6$	905	98,907	7752,4
146,1	57,2	$F2 = 142,0$	1009	110,27	7768,6
152,4	57,2	$F3 = 156,7$	1114	121,75	7768,7
158,8	57,2	$F4 = 172,4$	1224	133,77	7761,1
165,1	57,2	$F5 = 188,4$	1340	146,45	7773,8
171,5	57,2	$F6 = 205,3$	1460	159,56	7771,9

**Механіка елементів конструкцій**

Зовнішній $D$	Внутрішній $d$	Площа перерізу $F_2$ , $\text{см}^2$	Маса однієї труби, кг	Маса 1м труби $m_2$ , кг/м	Густина $\rho_2$ , $\text{кг/м}^3$
діаметр, мм					
177,8	71,4	$F7 = 208,2$	1481	161,86	7772,4
184,2	71,4	$F8 = 226,5$	1607	175,63	7755,9
190,5	71,4	$F9 = 245,0$	1741	190,27	7766,8
196,9	71,4	$F10 = 264,5$	1877	205,14	7756,9
203,2	71,4	$F11 = 284,3$	2018	220,55	7758,8
209,6	71,4	$F12 = 305,0$	2168	236,94	7768,4
215,9	71,4	$F13 = 326,1$	2315	253,01	7759,6

Перша серія досліджень проводились при довжині обтяженої бурильної труби  $l_2 = 130\text{ м}$  та змінній площі поперечного перерізу  $F_2 = 127,6 \div 326,1\text{ см}^2$ . Результати цих досліджень зведено до табл. 2.

**Таблиця 2.**

Залежність частот поздовжніх коливань БК  
від поперечного перерізу ОБТ

$F_2$ , $\text{см}^2$	Частота, Гц									
	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$
127,6	4,573	14,21	24,55	35,25	46,01	56,53	66,19	74,50	83,29	93,30
141,95	4,476	14,03	24,40	35,15	45,95	56,51	66,19	74,53	83,35	93,40
156,7	4,384	13,88	24,28	35,07	45,91	56,50	66,20	74,55	83,40	93,49
172,4	4,292	13,73	24,17	35,00	45,87	56,48	66,21	74,57	83,44	93,56
188,4	4,201	13,60	24,07	34,94	45,84	56,47	66,21	74,59	83,48	93,63
205,3	4,112	13,47	23,99	34,88	45,81	56,46	66,22	74,60	83,51	93,69
208,2	4,097	13,45	23,97	34,87	45,80	56,46	66,22	74,60	83,52	93,70
226,45	4,010	13,33	23,89	34,82	45,78	56,45	66,22	74,62	83,55	93,76
245,0	3,920	13,23	23,82	34,78	45,75	56,44	66,23	74,63	83,57	93,80
264,5	3,840	13,13	23,76	34,74	45,73	56,43	66,23	74,64	83,60	93,85
284,25	3,760	13,03	23,70	34,71	45,71	56,43	66,23	74,65	83,62	93,89
305,0	3,680	12,95	23,65	34,68	45,69	56,42	66,23	74,66	83,63	93,92
326,1	3,600	12,87	23,60	34,65	45,68	56,42	66,24	74,67	83,65	93,95

На рис. 1 показано частотний спектр коливань БК (в Гц) в залежності від площі поперечного перерізу ОБТ. Частоти отриманого спектра не кратні першій – основній власній частоті. Наприклад, поряд з там, як друга частота більше, ніж втричі перевищує першу, тоді як шоста – майже в 12, сьома – майже в 14, а десята – в 20. Отже, на низьких власних частотах періодичності не спостерігаються, а високочастотні коливання практично періодичні.

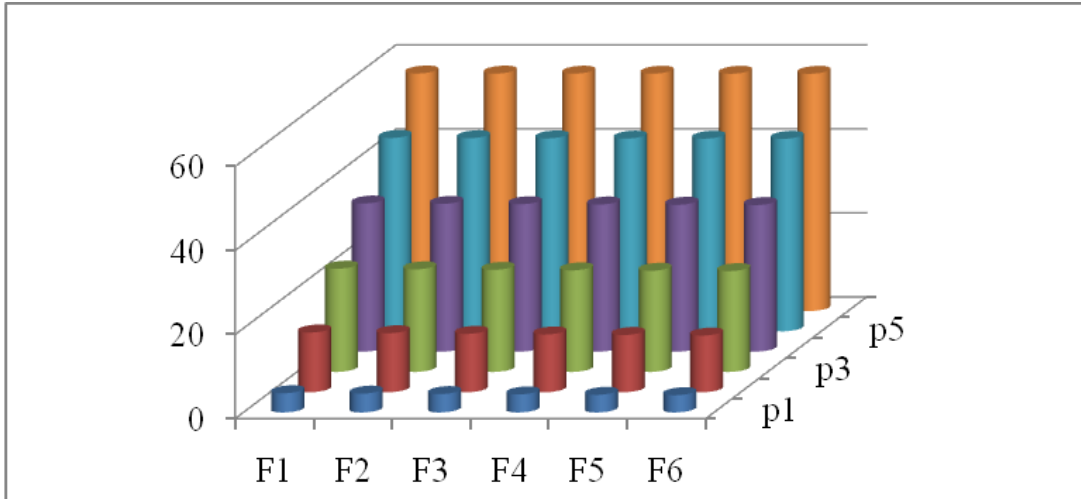
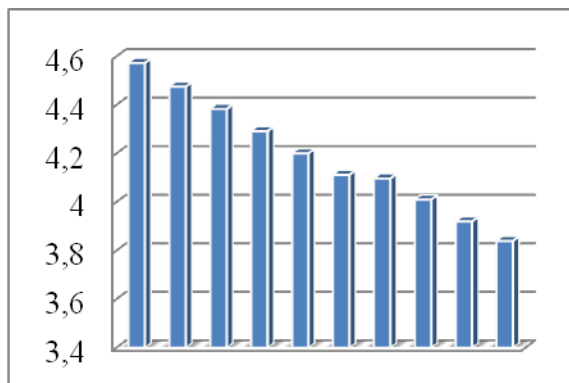
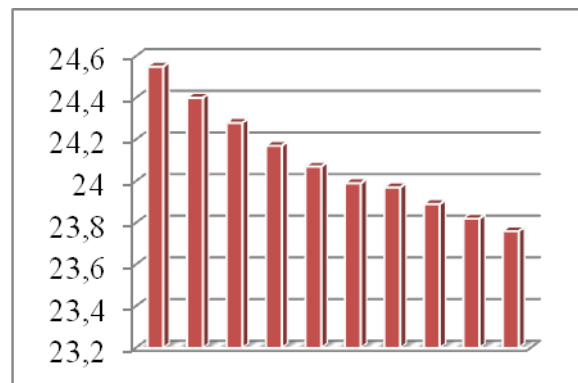


Рис. 1. Частотний спектр БК при змінній площі поперечного перерізу ОБТ

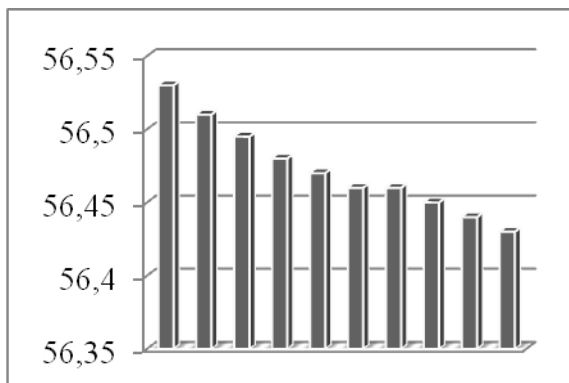
З рис. 2 видно, що із збільшенням площі поперечного перерізу (до шостої частоти) власні частоти коливань зменшуються, а починаючи з сьомої – зростають разом із зростанням площі поперечного перерізу, а, отже, й маси ОБТ.



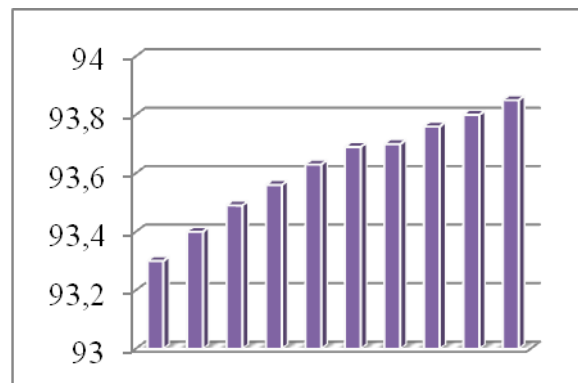
*a*



*б*



*в*



*г*

Рис. 2. Залежність частот коливань БК від площі поперечного перерізу ОБТ: *a*) першої; *б*) третьої; *в*) шостої; *г*) десятої

Друга серія досліджень проводились при площі поперечного перерізу  $F_2 = 284,25 \text{ см}^2$  та змінній довжині ОБТ  $l_2 = 40 \div 180 \text{ м}$ . Результати цих розрахунків зведено до табл. 3.

**Таблиця 3.**

Залежність частот поздовжніх коливань БК від довжини ОБТ

$l_2, \text{ м}$	Частота, Гц									
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$
40	4,873	14,87	25,31	36,05	46,86	57,42	67,05	75,41	84,55	95,02
60	4,551	14,21	24,66	35,48	46,38	57,02	66,74	75,13	84,24	94,70
70	4,410	13,96	24,44	35,30	46,22	56,89	66,63	75,04	84,14	94,58
80	4,280	13,75	24,25	35,15	46,10	56,78	66,55	74,96	84,04	94,48
100	4,049	13,41	23,98	34,93	45,91	56,62	66,41	74,83	83,88	94,28
110	3,946	13,27	23,87	34,85	45,84	56,55	66,35	74,77	83,80	94,17
120	3,850	13,14	23,78	34,77	45,77	56,49	66,29	74,71	83,71	94,05
130	3,760	13,03	23,70	34,71	45,71	56,43	66,23	74,65	83,62	93,89
140	3,676	12,94	23,63	34,65	45,66	56,37	66,17	74,58	83,50	93,66
150	3,600	12,85	23,56	34,59	45,60	56,31	66,11	74,51	83,36	93,33
160	3,522	12,77	23,51	34,54	45,55	56,26	66,04	74,41	83,16	92,73
180	3,386	12,63	23,41	34,45	45,46	56,14	65,88	74,15	82,38	89,78

На рис. 3 показано частотний спектр коливань БК (в Гц) в залежності від довжини ОБТ. З проведених досліджень доходимо висновку, що низькі частоти отриманого спектра не кратні першій – основній власній частоті, а високочастотні коливання практично періодичні.

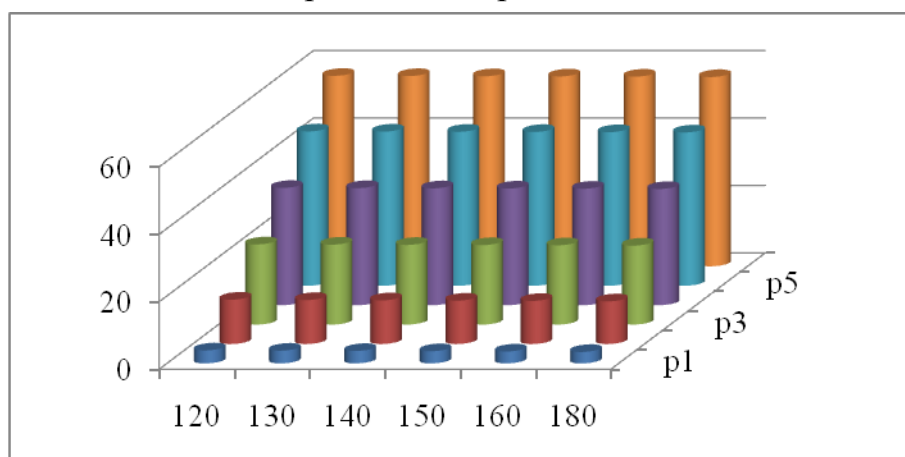


Рис. 3. Частотний спектр БК при змінній довжині секції ОБТ

З рис. 4 видно, що із збільшенням довжини, а, отже, й маси ОБТ, усі власні частоти коливань зменшуються.



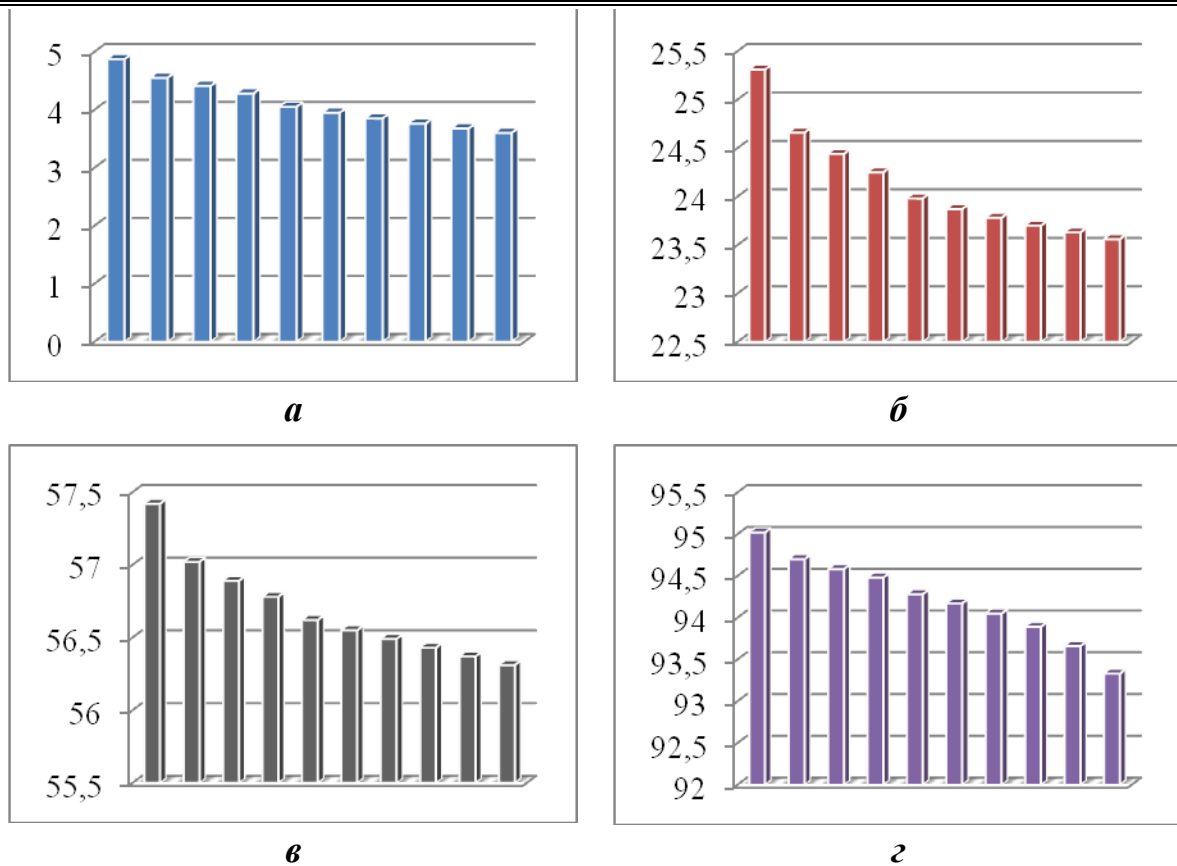


Рис. 4. Залежність частот коливань БК від довжини ОБТ: а) першої; б) третьої; в) шостої; з) десятої

### Висновки

Проведені чисельні розрахунки частотного спектра коливань БК в залежності від маси обважненого низу БК показали:

- 1) у загальному випадку спектр частот коливань БК не носить кратного характеру, і, як наслідок, коливання неперіодичні;
- 2) порушення періодичності коливань спостерігається на низьких частотах, проте на високих частотах коливання набувають періодичної форми;
- 3) основна частота коливань у випадку зміни довжини лежить у межах 31%, а поперечного перерізу ОБТ – 21%;
- 4) із збільшенням довжини ОБТ частоти коливань БК зменшуються, а частотний спектр звужується, але при цьому вкорочується проектна довжина бурильної колони;
- 5) із збільшенням поперечного перерізу ОБТ низькі частоти коливань зменшуються, а високі – збільшуються, поряд з цим проектна довжина бурильної колони незмінна.

Отримані результати досліджень будуть корисними при вивченні коливань БК, дослідженні перехідних процесів та визначенні резонансних зон роботи бурильної вежі.

**Список використаної літератури**

1. Drilling and Excavation Technologies for the Future / National Research Council Staff. Washington, DC, National Academy Press, 1994. – 176 p.
2. *Geoffroy H.* Study on Interaction Between Rocks and Worn PDC's Cutters / H. Geoffroy, D. Nguyen Minh, C. Putot // Int. J. of Rock Mechanics and Mining Science. 1997. – Vol. 34, № 314. – P. 611.
3. *Eronini I. E.* A Dynamic Model for Rotary Rock Drilling / I. E. Eronini, W. H. Somerton, D. M. Auslander // J. of Energy Resources Technology. 1982. – Vol. 104. – P. 108-120.
4. *Балюк Б. К.* Вибрационная прочность двигателей внутреннего сгорания / Б. К. Балюк. – Киев: Наукова думка, 1983. – 104 с.
5. *Огородніков П. І.* Вібрації та хвильової процеси в бурильній колоні, як додатковий ресурс збільшення корисної потужності на долоті / П. І. Огородніков, В. М. Світлицький, Б. М. Малярчук // Нафтова і газова промисловість. – 2012. – №5. – С. 19-23.
6. *Лисканич М. В.* Розрахунок показників надійності елементів КНБК при змінних навантаженнях / М. В. Лисканич, Я. С. Гридчук, А. П. Джус // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. Серія: Методи і засоби технічної діагностики. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2002. – Вип. 38 (Том 8). – С. 256-260.
7. *Glowka D.* Development of a method for predicting the performance and wear of PDC drill bits // Technical report SAND86-1475, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, 1987.
8. *Мойсишин В. М.* Математична модель ліквідації прихоплень бурильної колони ударним способом / В. М. Мойсишин, К. Г. Левчук // Всеукр. наук.-техн. журнал. Вібрації в техніці та технологіях. Вип. 3(75). 2014. – С. 84-93.
9. *Андреев Ю. М.* Моделирование динамики пространственных движений систем твердых тел в специальной системе компьютерной алгебры / Вісник СевНТУ: зб. наук. пр. Вип. 133/2012. Серія: Механіка, енергетика, екологія. – Севастополь, 2012. – С. 3-8.
10. *Голоскоков Д. П.* Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб.: Питер, 2004. – 539 с.
11. *Рыжиков Ю. И.* Имитационное моделирование (теория и практика). Санкт-Петербург, 2004, 529 с.
12. *Василенко Н. В.* Теория колебаний: Учебн. пособие. – К.: Вища школа, 1992. – 430 с.
13. *Аладьев В. З.* Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект / В. З. Аладьев, В. К. Бойко, Е. А. Ровба. – Гродно: Гродненский госуниверситет, 2011. – 517 с.
14. *Нюняйкин В. Н.* Справочник нефтяника / В. Н. Нюняйкин, Ф. Ф. Галеев, Ю. В. Зейгман, Г. А. Шамаев. – Уфа: Башкортостан, 2001, 260 с.