

УДК 621.01

DOI: <http://doi.org/10.20535/0203-3771372019164207>К. В. Авдонін¹, доцент

ЗАСТОСУВАННЯ СИМЕТРИЧНОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ МАТРИЦІ ПОВОРОТУ ДО ТЕОРІЇ ГІРОСКОПІЧНИХ ЯВИЩ

En

Representation for the elements of the three-dimensional rotation matrix with respect to the coordinate axes, which is more symmetric than their representation using Euler angles, is proposed in the paper. The projections of the angular velocity of rotation corresponding to the proposed representation of the rotation matrix are also symmetric with respect to the coordinate axes. A symmetric representation of the rotation matrix elements can provide new possibilities of finding, in an explicit form, the dynamics equations solutions, can simplify the numerical methods for finding solutions and, besides, can promote the navigation problems solution.

The proposed representation of the rotation matrix elements was used for mathematical modeling of the effect of the uniform electric field on the rotation of a symmetric mechanical gyroscope with a nonzero own electric moment. A Mathcad computational program which helped to obtain this result was created. There is the possibility to increase the gyroscope rotational motion energy with the impact of an electric field, but this effect is strongly dependent on the electric field strength and it exists only for values greater than the critical value.

The study of the alternating electric field influence on the mechanical gyroscope rotation, which has its own electrical moment, is a promising continuation of this work.

Ru

В данной работе предложено представление элементов трехмерной поворотной матрицы в виде функций от трех независимых углов, отличных от углов Эйлера, симметричное относительно осей координат. Представлены результаты математического моделирования влияния однородного электрического поля на механический гироскоп, с отличным от нуля электрическим дипольным моментом, полученные путем численного решения уравнений Эйлера.

Вступ

Важливою складовою частиною сучасних досліджень у галузі гіроскопії та навігації є удосконалення засобів знаходження кінематичних і динамічних характеристик обертального руху та спрощення переходу до неінерціальної системи відліку, який використовується у теорії гіроскопічних явищ. Наприклад, у роботі [1], на основі загальних теорем динаміки обертального руху та формалізму Лагранжа, розроблена методика синтезу рівнянь руху віброізолюваної гіроскопічної системи, які дозволяють досліджувати динаміку взаємного впливу системи віброзахисту та гіроскопічної

¹ Київський національний університет технологій та дизайну

системи. У роботі [2] проведено математичне моделювання кута повороту траєкторії руху чутливого елемента коріолісового, вібраційного гіроскопу. На сьогоднішній день у багатьох роботах, присвячених створенню та удосконаленню навігаційних приладів, дослідження спираються не на механічні гіроскопи, а гіроскопи із іншим принципом дії. Наприклад, у роботі [3] розглянуті задачі обчислення азимуту, за допомогою комплексу датчиків, що містить три лазерні гіроскопи, у роботі [4] шляхом чисельного моделювання досліджена частотна характеристика лазерного гіроскопу, яка дозволяє оптимізувати параметри частотної підставки із метою підвищення точності вимірів, у роботі [5] розглядається питання радіаційної стійкості волоконно-оптичних гіроскопів та їх основних компонентів, у роботі [6] знайдені оцінки основних, граничних параметрів гіроскопа на ядерному магнітному резонансі на ізотопах ксенону. Але, механічні гіроскопи, в окремих випадках, відіграють важливу роль у створенні сучасних навігаційних приладах, наприклад, у роботі [7] визначені оптимальні параметри пружного підвісу двох кільцевого динамічно настроюваного гіроскопу, у роботі [8] створена математична модель мікромеханічного гіроскопу, яка враховує електромеханічні нелінійні ефекти у ємнісних перетворювачах, у роботі [9] розглядається система орієнтації, яка складається із двох мікромеханічних модулів, встановлених на поворотних платформах, це обумовлює актуальність результатів даної роботи.

Постановка задачі

Опис обертального руху власної, неінерціальної системи відліку, пов'язаної із твердим тілом, відносно нерухомої системи відліку, найчастіше здійснюють за допомогою трьох кутів Ейлера.

Позначимо кути Ейлера наступним чином: ψ – кут власного обертання; φ – кут прецесії; ϑ – кут нутації. Тоді, залежність елементів матриці повороту a_{jk} від кутів Ейлера можна представити наступним чином:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi; \\ a_{12} &= \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi; \\ a_{13} &= \sin \vartheta \sin \varphi; \quad a_{21} = \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi; \\ a_{22} &= \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi; \quad a_{23} = -\sin \vartheta \cos \varphi; \\ a_{31} &= -\sin \psi \sin \vartheta; \quad a_{32} = \cos \psi \sin \vartheta; \quad a_{33} = \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (1)$$

а проекції кутової швидкості ω_k на вісі координат на вісі нерухомої системи координат будуть такими:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\dot{\phi} \sin \psi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \psi; \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \cos \psi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \sin \psi; \\ \omega_3 &= -\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{2}$$

Співвідношення (1) і (2) ілюструють асиметричність матриці повороту і проєкцій кутової швидкості, відносно осей координат, у їх представленні через кути Ейлера.

Метою даної роботи є знаходження таких трьох незалежних кутів повороту, що б виражені через них елементи матриці повороту і відповідні ним проєкції кутової швидкості мали високу симетрію, відносно осей координат, та застосування такого їх представлення до математичного моделювання впливу однорідного електричного поля на обертання симетричного, механічного гіроскопу, що має відмінний від нуля електричний дипольний момент.

Симетричне представлення елементів матриці повороту

Координати відносно нерухомої системи відліку будемо позначати через: (x_1, x_2, x_3) ; координати відносно власної системи відліку через: (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Початки відліку обох систем координат співпадають.

Проведемо зі спільного початку обох систем координат O промінь OM , симетричний відносно осей координат нерухомої системи відліку, таким чином, щоб промінь OM був розташований під однаковими, гострими кутами до напрямків осей координат нерухомої системи відліку, і промінь ON , симетричний відносно осей координат власної системи відліку, таким чином, щоб промінь ON був розташований під однаковими, гострими кутами до напрямків осей координат власної системи відліку. Кут між променями OM і ON позначимо через γ .

Позначимо через P – площину, перпендикулярну до променя OM , якій належить спільний початок координат, через Q – площину, перпендикулярну до променя ON , якій теж належить спільний початок координат. Пряму, по якій перетинаються площини P і Q , позначимо через l . Спроекуємо вісь координат x_1 на площину P і позначимо кут між проєкцією і прямою l через β . Проектуючи вісь координат ξ_1 на площину Q , позначимо кут між проєкцією і прямою l через α .

Якщо здійснити поворот власної системи відліку відносно променя ON на кут α , то проєкція осі координат ξ_1 на площину Q , співпаде з прямою l . Потім, якщо повернути власну систему відліку відносно прямої l на кут γ , то співпадуть промені ON і OM а також площини q і p .

Далі, якщо повернути власну систему відліку відносно спільного напрямку променів ON і OM на кут β , то вісі координат власної системи відліку співпадуть з відповідними осями координат нерухомої системи відліку.

Таким чином, доведено, що сукупність кутів α , β і γ однозначно визначає положення власної системи відліку відносно нерухомої системи відліку, оскільки трьома послідовними поворотами на вибрані кути власну систему відліку можна сумістити з нерухомою системою відліку.

Матриця повороту a_{jk} , яка визначає перетворення координат відносно власної системи відліку в координати відносно нерухомої системи відліку, представлена через кути α , β і γ , буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 a_{jk} = \frac{1}{3} \left\{ \cos \gamma - \sqrt{2} \sin \left(\alpha - (k-1) \frac{2\pi}{3} \right) \sin \gamma + \right. \\
 + 2 \cos \left(\alpha - (k-1) \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\beta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right) + \\
 + \sqrt{2} \sin \left(\beta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right) \sin \gamma + \\
 \left. + 2 \sin \left(\alpha - (k-1) \frac{2\pi}{3} \right) \sin \left(\beta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right) \cos \gamma \right\}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Безпосереднім обчисленням можна перевірити, що транспонована матриця (3) є оберненою матрицею до a_{jk} , тобто, транспонована матриця визначає зворотне перетворення координат. Проекції кутової швидкості ω_k , відносно нерухомої системи координат, визначаються через елементи матриці повороту наступним чином:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 = \dot{a}_{31}a_{21} + \dot{a}_{32}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{23}; \quad \omega_2 = \dot{a}_{11}a_{31} + \dot{a}_{12}a_{32} + \dot{a}_{13}a_{33}; \\
 \omega_3 = \dot{a}_{21}a_{11} + \dot{a}_{22}a_{12} + \dot{a}_{23}a_{13}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Підставляючи елементи матриці (3) у вирази (4) знаходимо:

$$\omega_k = -\frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{3}} \left(\cos \gamma + \sqrt{2} \sin \left(\beta - (k-1) \frac{2\pi}{3} \right) \sin \gamma \right) + \frac{\dot{\beta}}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \cos \left(\beta - (k-1) \frac{2\pi}{3} \right). \tag{5}$$

Оскільки матрицю, транспоновану до a_{jk} , можна одержати міняючи місцями кути α і β та змінюючи знак кута γ на протилежний, то проекції кутової швидкості ω_k^* відносно власної системи координат, можна знайти із виразу (5) аналогічним чином:

$$\omega_k^* = \frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{3}} - \frac{\dot{\beta}}{\sqrt{3}} \left(\cos \gamma - \sqrt{2} \sin \left(\alpha - (k-1) \frac{2\pi}{3} \right) \sin \gamma \right) - \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \cos \left(\alpha - (k-1) \frac{2\pi}{3} \right). \tag{6}$$

Співвідношення (3), (5) і (6) ілюструють значно більшу симетричність матриці повороту і проєкцій кутової швидкості, відносно осей координат, у їх представленні через кути α , β і γ , ніж у представленні за допомогою кутів Ейлера.

Механічний гіроскоп із відмінним від нуля електричним дипольним моментом в однорідному електричному полі

Найбільш простим шляхом розгляду гіроскопічних явищ, у випадку механічного гіроскопу, є перехід від нерухомої до власної системи відліку. Рівняння Ейлера у власній системі відліку мають такий вигляд:

$$\begin{cases} I_{11} \frac{d\omega_1^*}{dt} - \omega_2^* \omega_3^* (I_{22} - I_{33}) = D_1^* \\ I_{22} \frac{d\omega_2^*}{dt} - \omega_3^* \omega_1^* (I_{33} - I_{11}) = D_2^* \\ I_{33} \frac{d\omega_3^*}{dt} - \omega_1^* \omega_2^* (I_{11} - I_{22}) = D_3^* \end{cases} \quad (7)$$

де I_{11} , I_{22} , I_{33} – головні моменти інерції, відносно власної системи відліку; D_1^* , D_2^* , D_3^* – моменти зовнішніх сил, відносно власної системи відліку.

Параметри симетричного, механічного гіроскопу, що має єдину точку опори, співпадаючу з початком відліку систем координат, були вибрані такими: $m = 0,6 \text{ кг}$ – маса; $I_{11} = 0,001 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_{22} = I_{33} = 0,005 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ – головні моменти інерції, відносно власної системи відліку; $b = 0,05 \text{ м}$ – відстань від точки опори до центру мас; $p = 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} \cdot \text{кг}$ – власний електричний дипольний момент гіроскопу.

Напрямок осей координат власної системи відліку вибраний наступним чином: вісь координат ξ_1 проходить через центр мас гіроскопу, вздовж осі координат ξ_2 розташований власний електричний дипольний момент, симетрично відносно початку координат.

Оскільки ω_1^* – проєкція кутової швидкості на вісь ξ_1 значно перевищує проєкції на інші вісі координат, то будемо вважати, що момент сил тертя напрямлений вздовж осі ξ_1 і M_T^* – його проєкція на вісь координат ξ_1 , пропорційна до ω_1^* , тобто:

$$M_T^* = -\lambda \omega_1^* \quad (8)$$

Коефіцієнту тертя було надано значення: $\lambda = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, початкова проекція кутової швидкості на вісь ξ_1 дорівнювала: $\omega_1^*(0) = 90 \text{ рад/с}$. Якщо електричне поле відсутнє, то сумарний момент зовнішніх сил буде складатись тільки із сумарного моменту сил тяжіння та тертя і його проекції, у власній системі відліку, будуть такими:

$$D_1^* = -\lambda \omega_1^*, \quad D_2^* = a_{13} \cdot mgb, \quad D_3^* = -a_{12} \cdot mgb. \quad (9)$$

Результати моделювання обертального руху гіроскопу, яке спирається на чисельне знаходження розв'язків рівнянь Ейлера (7), для випадку проекцій сумарного моменту зовнішніх сил (9), представлені на рис. 1, а та рис. 1, б.

На рис. 1, а та рис. 1, б показані залежності від часу елементу матриці повороту a_{11} та проекції кутової швидкості ω_1^* у випадку відсутності електричного поля, із урахуванням дії сил опору.

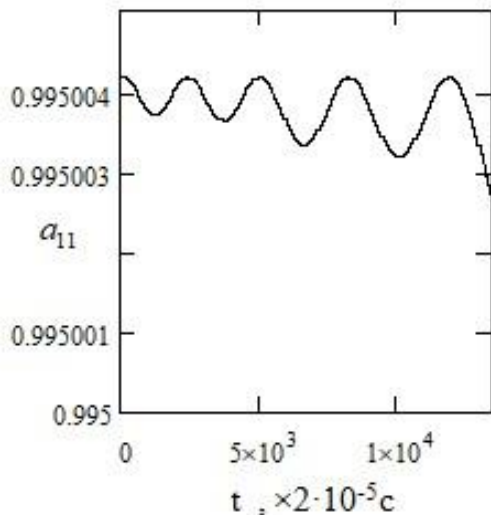


Рис. 1, а

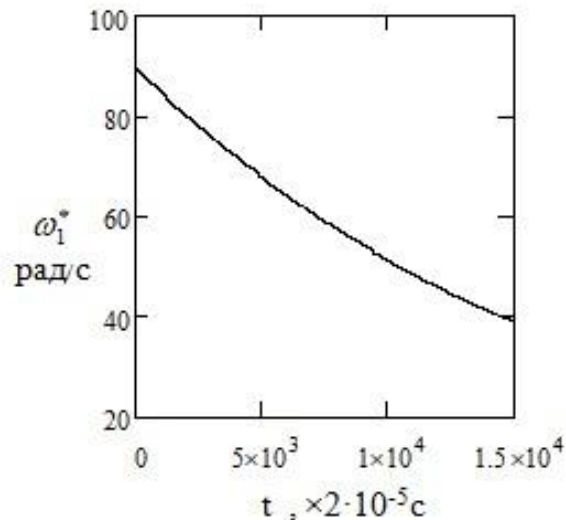


Рис. 1, б

Із показаної на рис. 1, а залежності від часу косинуса кута між осями координат ξ_1 і x_1 , якому відповідає елемент матриці повороту a_{11} , видно, що за наявності сил опору, амплітуда коливань кута між осями координат із часом збільшується, а із показаної на рис. 1, б залежність від часу проекції кутової швидкості ω_1^* впливає, що за наявності сил опору, вона із часом зменшується за експоненціальним законом.

Виберемо вздовж осі координат x_3 напрям напруженості зовнішнього, однорідного електричного поля. Тобто, проекції напруженості поля на вісі нерухомої системи координат дорівнюють:

$$E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = E = 5 \cdot 10^4 \text{ В/м}. \quad (10)$$

Тоді, сумарний момент зовнішніх сил буде складатись із сумарного моменту сил тяжіння, сил тертя та сил взаємодії електричного поля із електричним диполем гіроскопу, і його проекції, у власній системі відліку, будуть такими:

$$D_1^* = -\lambda\omega_1^* + a_{33} \cdot pE, \quad D_2^* = a_{13} \cdot mgb, \quad D_3^* = -a_{12} \cdot mgb + a_{31} \cdot pE. \quad (11)$$

Чисельне знаходження розв'язків рівнянь Ейлера (7), для випадку сумарного моменту зовнішніх сил (11) дає результати, представлені на рис. 2, а та рис. 2, б.

На рис. 2, а та рис. 2, б показані залежності від часу елементу матриці повороту a_{11} та проекції кутової швидкості ω_1^* за наявності електричного поля, напруженість якого перевищує критичне значення, із урахуванням дії сил опору.

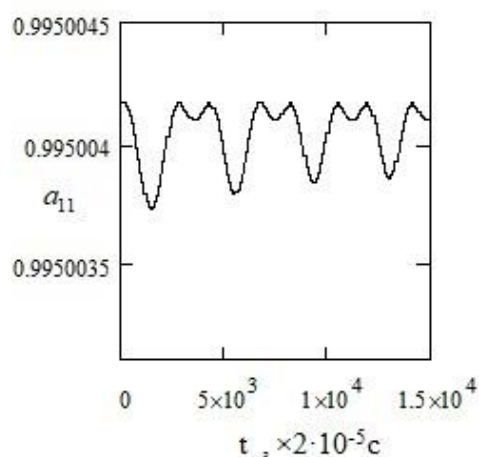


Рис. 2, а

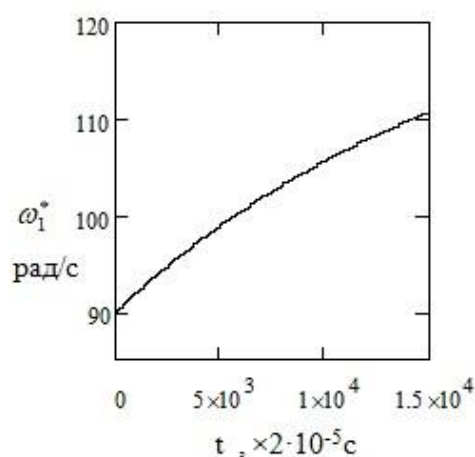


Рис. 2, б

Із показаної на рис. 2, а залежності від часу елементу матриці повороту a_{11} видно, що при наявності сил опору та сил взаємодії електричного поля з електричним диполем гіроскопу, залежність від часу кута між осями координат ξ_1 і x_1 має складний, нелінійний характер, але абсолютне значення кута між осями координат з часом зменшується.

Із показаної на рис. 2, б залежності від часу проекції кутової швидкості ω_1^* видно, що кутова швидкість обертання гіроскопу, із відмінним від нуля власним електричним дипольним моментом, у зовнішньому електричному полі може збільшуватись за часом. Тобто, гіроскоп може отримувати енергію від електричного поля.

Але, як показали обчислення, ефект збільшення механічної енергії гіроскопу, внаслідок дії зовнішнього електричного поля, може спостерігатись тільки тоді, коли модуль напруженості електричного поля більший за певне, критичне значення E_{kp} . Наближене, критичне значення для модуля

напруженості електричного поля можна одержати з рівностей (11), покладаючи для початкового моменту часу: $D_1^*(0) = 0$, звідки випливає:

$$E_{кр} \approx \frac{\lambda \omega_1(0)}{r a_{33}(0)}, \quad (12)$$

але математичне моделювання показало, що точне, критичне значення для модуля напруженості електричного поля, для вибраних параметрів гіроскопу, на $0,494 \text{ В}$ менше, ніж наближене значення, знайдене за виразом (12) і дорівнює: $E_{кр} = 35581,5 \text{ В/м}$.

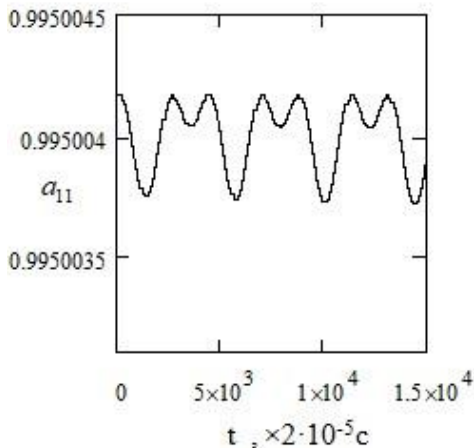


Рис. 3, а

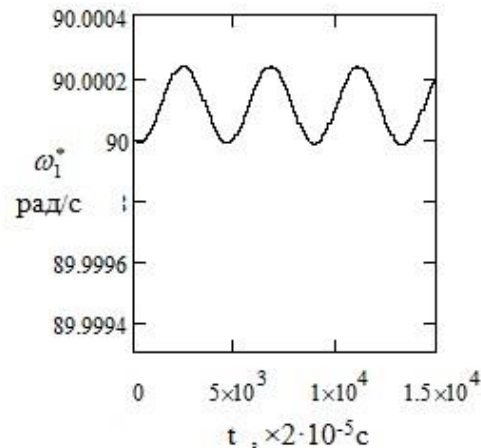


Рис. 3, б

На рис. 3, а та рис. 3, б показані залежності від часу елементу матриці повороту a_{11} та проекції кутової швидкості ω_1^* за критичне значення напруженості електричного поля, із урахуванням дії сил опору.

Із графіків, зображених на рис. 3, а та рис. 3, б, випливає, що кут між осями координат ξ_1 і x_1 та проекція кутової швидкості ω_1^* , наближено, будуть постійними величинами, оскільки, їх середні значення не змінюються із часом і амплітуда коливань їх значень нехтовно мала, у порівнянні із середніми значеннями.

Висновки

Запропоноване у роботі представлення елементів тривимірної матриці повороту, яке визначається виразом (3), має значно більш високу ступінь симетрії відносно осей координат, ніж представлення за допомогою кутів Ейлера. Проекції кутової швидкості обертання, знайдені за допомогою запропонованого представлення, визначені виразами (5) та (6), теж мають високу ступінь симетрії, відносно осей координат. Використання запропонованого представлення дає нові можливості для знаходження розв'язків рівняння Ейлера (7), у явному вигляді, та спрощує створення

обчислювальних програм, для чисельних методів знаходження розв'язків. Для математичного моделювання впливу однорідного електричного поля на обертальний рух симетричного, механічного гіроскопу, з відмінним від нуля власним електричним дипольним моментом, на основі запропонованого представлення елементів матриці повороту, у середовищі *Mathcad*, була створена обчислювальна програма, за допомогою якої отриманий такий результат: існує можливість збільшення енергії обертального руху гіроскопу, внаслідок дії однорідного електричного поля, але, цей ефект залежить від значення модуля напруженості електричного поля, яке повинно бути більшим за критичне значення. Можливим, перспективним продовженням даної роботи є математичне моделювання впливу змінного електричного поля на гіроскоп, із відмінним від нуля власним, електричним дипольним моментом.

Список використаної літератури

1. *Kryshtal V. F.* «Metodyka syntezy rivnyan ruxu vibroizolovanoj girokopichnoj systemy» / V. F. Kryshtal, L. M. Ryzhkov // *Mexanika girokopichnyx system*, 2016. vol. 32, pp. 39 – 47.
2. *Apostolyuk V.* «Dynamics of trajectory rotation in coriolis vibratory gyroscoped»/ V. Apostolyuk// *Mexanika girokopichnyx system*, 2013. vol. 26, pp. 15 – 21.
3. *Davydov V. P.* «Teoretychni ta eksperymentalni doslidzhennya poxybok troxvisnogo i odnovisnogo girokompasiv na osnovi lazernyx girokopiv»/ V. P. Davydov, Yu. A. Dudko // *Mexanika girokopichnyx system*, 2017. vol. 34, pp. 72 – 82.
4. *Azarova V. V.* «Chastotnaya harakterystyka lazernyx gyrokopov v shyrokom dyapazone uglovuh skorostej vrashheniya»/ V. V. Azarova, A. P. Makeev, E. V. Kuzneczov, Yu. D. Golyaev // *Gyroskopiya i navygaciya*, 2018. vol. 26, # 2(101), pp. 3 – 14.
5. *Egorov D. A.* «Problemu obespechenyya radyacyonnoj stojkosty volokonno-optycheskyx gyrokopov i puty ee povusheniya» / D. A. Egorov, A. V. Rupasov, A. A. Untylov // *Gyroskopiya i navygaciya*, 2018. vol. 26, # 4(103), pp. 23 – 42.
6. *Vershovskij A. K.* «Gyroskop na yadernom magnytnom rezonanse: predelnue karakterystyky»/ A. K. Vershovskij, Yu. A. Lytmanovych, A. S. Pazgalev, V. G. Peshexonov // *Gyroskopiya i navygaciya*, 2018. vol. 26, # 1(100), pp.55 – 80.
7. *Balabanova T. V.* «Pro optymizaciyu parametriv dvox kilcevogo dynamichno nastroyuvanogo girokopu»/ T. V. Balabanova // *Mexanika girokopichnyx system*, 2012. vol. 25, pp. 11 – 21.
8. *Baranova E. A.* «Modelyrovanye vozdejstvyya postupatelnuh vybracyj na mykromexanicheskyj gyroskop RR-tipa kompensacyonnogo

- preobrazovaniya» / E. A. Baranova, M. Y. Evstyfeev, D. P. Elyseev //, Gyroskopiya i navigaciya, 2017. vol. 25, # 3(98), pp. 86 – 96.
9. Lyan Cz. «Metod obrabotky yzmerenyj ot dvux blokov mykromexanicheskyx gyroskopov pry reshenyy zadach orientacyy»/ Lyan Cz., Lytvynenko Yu. A., Stepanov Yu. A.// Gyroskopiya i navigaciya, 2018. vol. 26, # 2(101), pp. 29 – 42.
10. Pavlov V. A. «Gyroskopycheskyj effekt, ego proyavlenye y yspolzovanye» / V. A. Pavlov //1985. [Gyroscopic effect, its use and use] Nauka, Moskow, Russia.