УДК 532.535
DOI: http://dx.doi.org/10.20535/0203-3771362018158265

О. С. Лимарченко[1], *професор*, **Ю. А. Слюсарчук**[2], *аспірант*,
О. Ю. Параньківа[3], *аспірант*

ПОВЕДІНКА СИСТЕМИ НЕЦИЛІНДРИЧНИЙ РЕЗЕРВУАР – РІДИНА У ЗАРЕЗОНАНСНОМУ ДІАПАЗОНІ ЗМІНИ ЧАСТОТ

En Modern potentials of analytical methods, based on variational algorithms, allow studying the nonlinear dynamics problems of reservoirs with liquid within the framework of models of the system components combined motion and non-cylindrical shape reservoirs which are difficult to study. The results of the experiments revise some of the previously obtained theoretical data, e.g. about system behavior in a vicinity of the resonance, where oscillations modulation results in the property that even for durable time intervals the system does not pass into a steady mode of oscillations. Behavior of the reservoir – liquid system under force disturbance of translational motion in the above-resonance range of variation of frequencies is considered. The reservoir in the form of the revolution body e.g. spherical and hyperboloid reservoirs is considered. Distinctions of wave generation manifestation in comparison with below-resonance and near-resonance disturbance modes are shown. It is noted that surface wave generation is accompanied by considerable manifestation of oscillations modulation. Qualitative comparison of the obtained results with experimental data is presented.

Ru Рассмотрено поведение системы резервуар – жидкость при силовом возбуждении поступательного движения в зарезонансном диапазоне изменения частот. Рассматривается резервуар в форме тела вращения для случая сферического и гиперболоидального резервуаров. Показаны отличия проявления волнообразования по сравнению с дорезонансным и околорезонансным режимами возбуждения. Отмечено, что поверхностное волнообразование сопровождается существенным проявлением модуляции колебаний.

Вступ

У великій мірі інтерес до задач динаміки рідини у резервуарах зумовлений сучасними практичними потребами техніки. Багато видів інженерних систем пов’язані із транспортуванням рідких вантажів. Такі транспортні системи як ракети–носії, літаки, цистерни часто використовуються на практиці. У більшості випадків рідина не цілком заповнює баки таких систем і під час транспортування виникають коливання вільної поверхні рідини. У багатьох системах у процесі експлуатації рідина витрачається, що призводить до того, що маси рідини, яка коливається і її частотні парамет-

[1] *Київський національний університет імені Тараса Шевченко*
[2] *Київський національний університет імені Тараса Шевченко*
[3] *Київський національний університет імені Тараса Шевченко*

ри змінюються у часі. За великої відносної масі рідини її хвильові рухи можуть істотно впливати на динаміку транспортного засобу. Для виключення небажаного розвитку процесів необхідно володіти високо достовірною моделлю. Теоретичні і експериментальні дослідження свідчать про те, що моделі, які основані на ідеях лінеаризації процесів, не відбивають багатьох важливих властивостей, і тому їхня достовірність є обмеженою. Ускладнення режимів експлуатації сучасних транспортних засобів і підвищені вимоги до точності їх функціонування призводять до необхідності здійснювати моделювання на основі нелінійного опису динамічних явищ, враховувати повне різноманіття взаємодіючих факторів, що впливають на динамічну поведінку конструкцій із рідиною.

Розглядається нелінійна задача про вимушені коливання нециліндричного резервуару і рідини із вільною поверхнею у разі їх сумісного руху. Порівнюється рух резервуарів у формі сфери, одно- та дво- порожнинного гіперболоїда. Для дослідження задачі було використано модель [1 – 3], яка була протестована для задач динаміки резервуарів із рідиною із вільною поверхнею, зокрема у дорезонансному [2] та резонансному діапазоні частот [3].

Постановка задачі

Метою роботи є дослідження поведінки системи нециліндричний резервуар – рідина із вільною поверхнею у разі збудження руху періодичною силою. Розглядається поведінка системи у зарезонансному діапазоні частот.

Математична модель системи

Для випадків сферичного резервуару, одно- та двопорожнинного гіперболоїдів виникають значні математичні складності у разі опису руху рідини із вільною поверхнею. Це спричинено тим, що у системі додатково з'являються різні геометричні нелінійності, і тим, що область визначення вільної поверхні рідини весь час змінюється у порівнянні із циліндричним випадком. Методика розв'язання такого типу задач була розвинена у попередніх роботах [1–3], тому подамо математичну модель системи більш стисло.

Для опису руху рідини вводиться недекартова параметризація області τ, яку займає рідина

$$\alpha = \frac{r}{f(z)}; \ \beta = \frac{z}{H}.$$

Рівняння вільної поверхні рідини можна представити у вигляді:

$$\beta = \frac{1}{H}\xi(\alpha, \theta, t).$$

Математичне формулювання задачі про рух системи резервуар–рідина із вільною поверхнею, складається із кінематичних умов, динамічних рівнянь та початкових умов [1]. Для досліджуваної системи до кінематичних умов слід віднести вимогу нерозривності потоку в області τ

$$\Delta\varphi = 0 \text{ у } \tau$$

умову неперетікання на границі контакту тіло–рідина Σ із ортом зовнішньої нормалі $\vec{n}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{n} \text{ на } \Sigma$$

і умову неперетікання на вільній поверхні рідини

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

у разі $\beta = \frac{1}{H}\xi\left(\alpha, \theta, t\right)$.

Динамічна гранична умова, яка відповідає рівності тисків на вільній поверхні рідини буде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 - \vec{\nabla}\varphi \cdot \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{g} \cdot \vec{r} = 0 \text{ на } S.$$

Динамічні граничні умови та рівняння руху резервуару у їх сумісному русі отримуються на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

із функцією Лагранжа у вигляді [1]:

$$L = \frac{1}{2}\rho\int_{\tau}(\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2}M_p(\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - \frac{1}{2}\rho g\int_{S_0}\xi^2 dS - (M_p + M_f)\varepsilon_z g,$$

де ρ – густина рідини, M_p – маса резервуара, M_f – маса рідини, g – прискорення вільного падіння.

Після задовільнення кінематичних граничних умов [1] отримується варіаційна задача для вільної системи, для якої записуються рівняння Лагранжа другого роду.

Надалі це дозволяє застосувати метод збурень і метод Канторовича для побудови нелінійної скінченовимірної моделі динаміки системи резервуар–рідина.

Аналіз чисельних результатів

Досліджується задача динаміки рідини з вільною поверхнею в сферичному резервуарі, у резервуарах у формі одно- та двопорожнинного гіперболоїдів із радіусом вільної поверхні R. Для цієї задачі поведінку системи було розглянуто для частот більших за резонансні під час руху резервуара у горизонтальній площині під дією періодичної сили $Y = A\sin(\omega t)$. Одержані результати порівнювались із поведінкою циліндричного та конічного резервуарів.

Розвиток коливань розглядається для випадку, коли маса резервуару у 5 разів менша за масу рідини $M_r = 0,2M_g$. Амплітуди збурень рідини на стінці резервуару досліджуються на частотах $1,25\,\omega_N$ та $1,5\,\omega_N$, де ω_N – власна частота сумісного руху рідини та резервуару, яка залежить від співвідношення їх мас.

Розглянемо детальніше амплітуду збурень рідини на стінці резервуару в часі для сфери, одно- та двопорожнинного гіперболоїда. На рисунках показано залежність амплітуди коливань вільної поверхні рідини на стінці бака від часу в секундах. По вісі x відкладений час, по вісі y — збурення. На рис. 1 – рис. 3 показано зміну амплітуд на частотах $1,1\omega_N$ (ліворуч) та $1,5\,\omega_N$ (праворуч) для сфери, і частотах $1,25\,\omega_N$ (ліворуч) та $1,5\,\omega_N$ (праворуч) для одно- та двопорожнинного гіперболоїда.

З рисунків видно, що для частот $1,1\omega_N$ для сфери і $1,25\,\omega_N$ для гіперболоїда, а також $1,5\,\omega_N$ поведінка системи відрізняється. У випадку нижчої частоти чіткіше спостерігається періодичність модуляції, несиметрія поверхневого хвилеутворення для всіх розглянутих резервуарів. Для коливань системи у нелінійному діапазоні збурень характерним є вплив вищих гармонік, який більш суттєво проявляється для частоти $1,5\,\omega_N$. Для розглянутих резервуарів найяскравіше це спостерігається для двопорожнинного гіперболоїда. Явище антірезонансу практично не помітне. Проте поряд із амплітудною модуляцією для коливань із не максимальною амплітудою проявляється явище частотної модуляції. Для всіх геометричних форм резервуарів, що розглядаються, на всіх частотах вихід системи на режим усталених коливань не спостерігається.

Висновки

У рамках нелінійної моделі сумісного руху системи резервуар–рідина із вільною поверхнею розглянуто задачу поведінки системи під час збудження її поступального руху у горизонтальній площині силою, прикладеною до стінки резервуара, яка змінюється з часом за гармонічним законом із частотою, що перевершує частоту власних коливань системи. Розглянуто випадки резервуарів сферичної форми, а також одно- і двопорожнинного гіперболоїда. Встановлено, що за короткий проміжок часу встановлюється режим коливань, який має ознаки амплітудної і частотної модуляції. Проявляється також несиметрія коливань на вільній поверхні рідини. Подібні властивості система проявляє також для випадку циліндричного і конічного резервуарів. Загальні властивості руху рідини якісно узгоджуються з даними експериментів [4, 5].

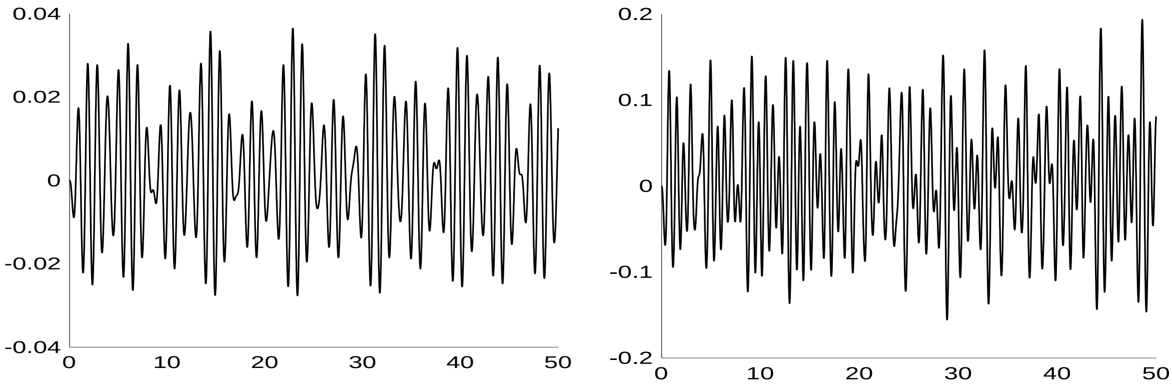

Рис. 1. Коливання поверхні рідини для сферичного резервуару

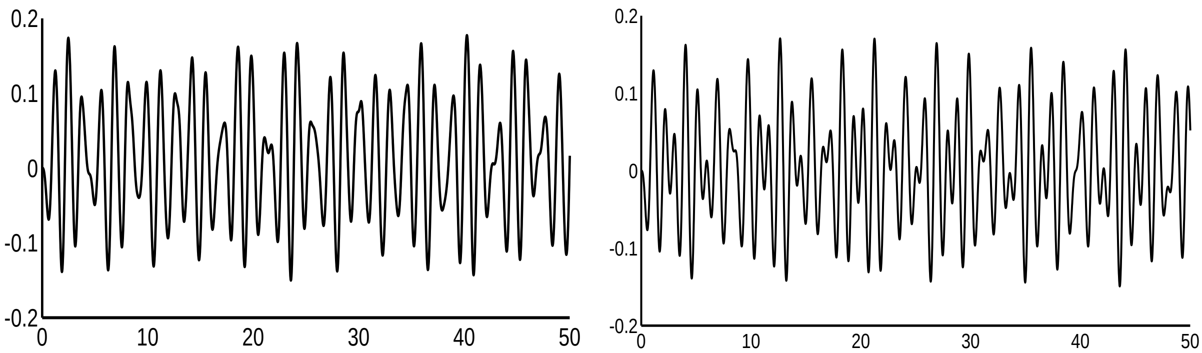

Рис. 2. Коливання поверхні рідини для однопорожнинного гіперболоїда

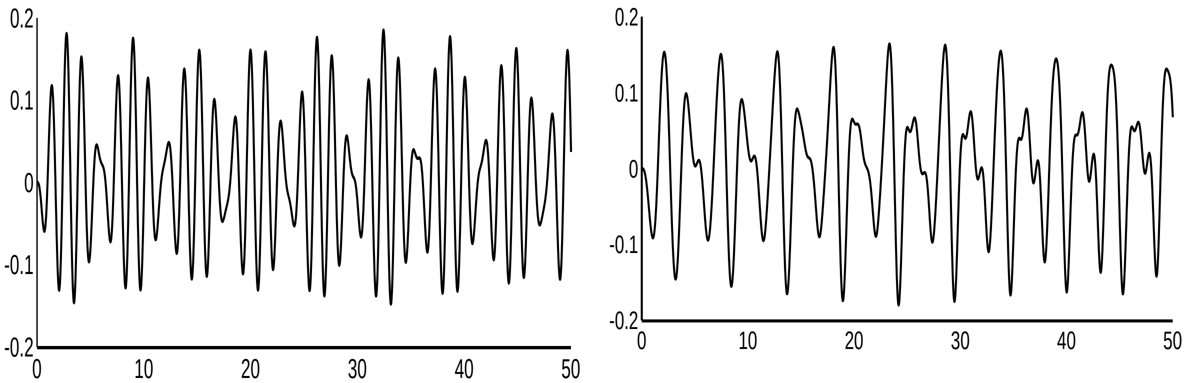

Рис. 3. Коливання поверхні рідини для двопорожнинного гіперболоїда

Список використаної літератури

1. *Limarchenko O. S.* Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscuillations of liquid with a fre surface in cavities of non-cylindrical shape / O. S. Limarchenko // Ukr. math. journal.—2007.– 59, 1.—P. 44–70.
2. *Limarchenko O.* Dynamical behavior of liquid in reservoir of revolution under harmonic force disturbance in the below resonant frequency range / O. Limarchenko, O. Parankina, Yu. Slyusarchuk // Mathematical Modeling and Computing.— 2017.— 4. – 2.—P. 156-161.
3. *Лимарченко О. С.* Резонансна поведінка вільної поверхні рідини в резервуарі в формі тіла обертання / О. С. Лимарченко, Ю. А. Слюсарчук, О. Ю. Параньківа // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2016ю – 13. – 2, Р. 1–9.
4. *Faltinsen O. M.* Transient and steadystate amplitudes of resonant three dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth / O. M. Faltinsen, O. F. Rognebakke, A. N. Timokha // Physics of fluids.— 2006.—18 (1).— P. 012103-1–012103-14.
5. *Pal P.* Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study / P. Pal // International Journal of Recent Trends in Engineering. – 2009. – 1(6), P. 1–5.