

УДК 629.783

DOI: <http://dx.doi.org/10.20535/0203-3771362018147091>

Л. М. РИЖКОВ¹, д.т.н., професор, О. С. ВОЛКОВ², бакалавр

ВПЛИВ ДРЕЙФІВ ГІРОСКОПА НА ТОЧНІСТЬ КОМПЛЕМЕНТАРНОГО ФІЛЬТРА

En

The paper deals with the analysis and synthesis of a complementary filter. The focus is on studying the effect of gyro drift on the accuracy of the filter. It is shown that the presence of errors can be associated with an additional rotation matrix, which is the sum of the unit and small skew-symmetric matrix. The structure of the moment of the complementary filter correction is substantiated. The feature of filter functioning in an arbitrary reference coordinate system is presented. In an arbitrary coordinate system there will be the effect of drifts with respect to all axes of the reference coordinate system. The efficiency of a magnetometer introduction in-

¹ НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», кафедра систем керування літальних апаратів

² НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», механіко-машинобудівний інститут

to the complementary filter is investigated. It is shown that due to the proper choosing of the transfer function in the accelerometer correction channel, it is possible to eliminate the systematic error not only from the gyroscope signal, but also from the magnetometer signal.

Ru

В работе рассматриваются вопросы анализа и синтеза комплементарного фильтра. Основное внимание уделено исследованию влияния дрейфов гироскопа на точность работы фильтра. Показана особенность функционирования фильтра в произвольной опорной системе координат. Исследована эффективность введения магнитометра в состав комплементарного фильтра.

Вступ

Одне із основних призначень комплементарного фільтра – зменшення впливу дрейфів гіроскопа на точність визначення кутів повороту об'єкта [1-3]. Як правило, це забезпечується введенням у комплементарний фільтр акселерометра. Унаслідок великих статичних похибок магнітометрів вони значно рідше використовуються із цією метою. Суттєво, що комплементарні фільтри, як правило, досліджуються у системі координат, у якій одна площина є горизонтальною (далі будемо називати таку систему координат земною). У той же час може мати місце задача, коли кути орієнтації треба визначати у довільній опорній системі координат. Наприклад, у системах наведення орієнтація може здійснюватися відносно системи координат, у якій знаходився об'єкт у початковий момент.

Постановка задачі

Розглянемо вплив дрейфів гіроскопа на точність комплементарного фільтра в довільній опорній системі координат, а також використання магнітометра для зменшення цього впливу.

Вирішення задачі

Розглянемо функціонування комплементарного фільтра у деякій опорній системі координат $OX_r Y_r Z_r$, положення якої відносно зв'язаної з Землею системи координат $OX_o Y_o Z_o$ (площина $X_o Y_o$ – горизонтальна) визначимо кутами $\psi_r, \theta_r, \varphi_r$ (рис. 1).

У разі відсутності похибок вимірювань рухомій системі координат (позначимо її через $OXYZ$) відповідає ортогональна матриця напрямних косинусів R . Ортогональну матрицю із урахуваннями похибок вимірювань позначимо \hat{R} . Введемо деяку матрицю H та запишемо

$$\hat{R} = HR. \quad (1)$$

Зауважимо, що матриця H задається в системі координат $OXYZ$. Маємо $\hat{R}\hat{R}^{-1} = \hat{R}\hat{R}^{-T} = HRR^T H^T = HH^T = I$.

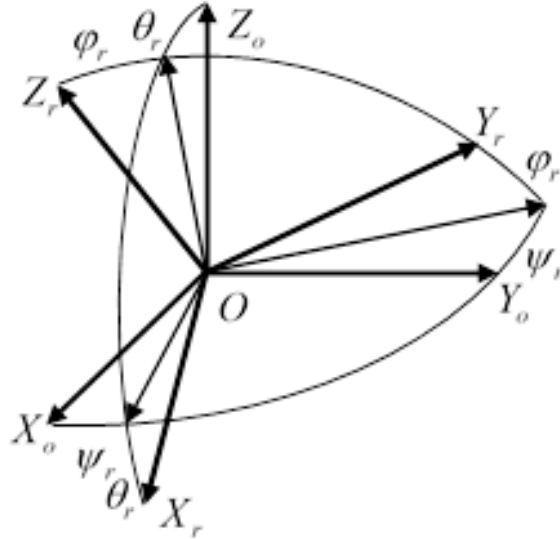


Рис. 1. Системи координат

Крім того, $\det(H) = \det(A_*) / \det(A) = +1$. Тобто, наявності похибок можна поставити у відповідність додатковий поворот відносно системи координат $OXYZ$, який визначається матрицею H .

Припустимо, що похибки вимірювань малі і покладемо $H = E + B$, де B – мала матриця.

Запишемо $\hat{R} = (E + B)R$ і розглянемо співвідношення $\hat{R}\hat{R}^T = I$. Отримаємо

$$(ER + BR)(R^T E^T + R^T B^T) = EE^T + EB^T + BE^T + BB^T \approx EE^T + EB^T + BE^T.$$

Повинно бути $EE^T + EB^T + BE^T = I$. Це виконується у разі $E = I$; $B + B^T = 0$, тобто, $B = -B^T$.

Таким чином, для малих похибок вимірювань матриця додаткового повороту H є сумою одиничної матриці та малої кососиметричної матриці.

Запишемо

$$\hat{R} = (I + B)R, \quad (2)$$

де

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_z & \sigma_y \\ \sigma_z & 0 & -\sigma_x \\ -\sigma_y & \sigma_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z - \text{малі кути.}$$

Вважаємо, що відомим є вимірний m та обчислений \hat{m} вектор у системі координат $OXYZ$. Для знаходження сигналів корекції введемо вектор $\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z]^T$ та розглянемо векторний добуток

$$\vec{u} = \vec{m} \times \vec{\hat{m}}. \quad (3)$$

У матричній формі цей вираз можна записати так

$$\mathbf{u} = M\hat{\mathbf{m}},$$

де

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -m_z & m_y \\ m_z & 0 & -m_x \\ -m_y & m_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Так як $\hat{\mathbf{m}} = (I + B)\mathbf{m} = \mathbf{m} + B\mathbf{m}$, можна записати $\vec{\hat{m}} = \vec{m} + \vec{\sigma} \times \vec{m}$. Тоді формула (3) набуде вигляду $\vec{u} = \vec{m} \times \vec{\hat{m}} = \vec{m} \times (\vec{\sigma} \times \vec{m}) = -\vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{\sigma})$. У матричній формі цей вираз запишеться так

$$\mathbf{u} = -M^2\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} m_y^2 + m_z^2 & -m_x m_y & -m_x m_z \\ -m_y m_x & m_x^2 + m_z^2 & -m_y m_z \\ -m_z m_x & -m_z m_y & m_x^2 + m_y^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}. \quad (4)$$

Тобто, вектор \mathbf{u} є пропорційним вектору похибок $\boldsymbol{\sigma}$.

Розглянемо окремий випадок, коли вектор \mathbf{m} має відмінну від нуля проекцію тільки на одну вісь системи координат, наприклад, на вісь OZ . У цьому разі маємо

$$\mathbf{u} = m_z^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = m_z^2 \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Бачимо, що у цьому випадку відсутня складова сигналу корекції, пропорційній куту σ_z . Для комплементарного фільтра, де має місце проекція вектора \vec{g} тільки на вертикальну вісь, це означає відсутність корекції у горизонтальній площині. Тобто, за рахунок введення акселерометра неможливо усунути вплив дрейфів гіроскопа в горизонтальній площині.

Вважаємо заданими кутові швидкості дрейфів $\omega_x^\delta, \omega_y^\delta, \omega_z^\delta$ навколо осей зв'язаної системи координат $OXYZ$. Припустимо, що кутові відхилення зв'язаної системи координат відносно опорної системи координат є малими, що дозволяє записати $\omega_r \approx \omega_b$, де ω_r – вектор кутових швидкостей дрейфів в опорній системі координат, ω_b – вектор кутових швидкостей дрейфів у зв'язаній системі координат.

Під час корекції від акселерометра вплив кутових швидкостей дрейфів у горизонтальній площині не компенсується. Тобто, кутова швидкість дрейфу ω_{z_0} навколо осі OZ_0 не змінюється. Це можна записати таким чи-

ном: $\omega_{z_o} = \omega_o(3)$, де $\omega_o(3)$ – третій елемент масиву $\omega_o = R^T \omega_b$ кутових швидкостей дрейфів в системі координат $OX_o Y_o Z_o$.

Таким чином, якщо комплементарний фільтр використовується в системі координат $OX_o Y_o Z_o$ за наявності корекції буде мати місце дрейф відносно осі OZ_o і буде відсутній дрейф відносно осей OX_o та OY_o . Тобто, результуючий вектор дрейфу ω_{o^*} буде

$$\omega_{o^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_o \end{bmatrix} = KR^T \omega_b,$$

де

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

У разі використання комплементарного фільтра у системі координат $OX_r Y_r Z_r$ будуть мати місце проєкції вектора ω_{o^*} на осі системи координат $OX_r Y_r Z_r$, тобто, буде мати місце дрейф відносно всіх осей цієї системи координат, який не усувається комплементарним фільтром. Маємо

$$\omega_r = R\omega_{o^*} = RKR^T \omega_b. \quad (5)$$

Розглянемо приклад. Прийmemo $\omega_x = 1 \cdot 10^{-4} 1/c$; $\omega_y = 3 \cdot 10^{-4} 1/c$; $\omega_z = 4 \cdot 10^{-4} 1/c$; $\psi = 10^0$; $\theta = 20^0$; $\varphi = 30^0$. За формулою (5) отримаємо

$$\omega_x = -1,478 \cdot 10^{-4} 1/c; \omega_y = 2,031 \cdot 10^{-4} 1/c; \omega_z = 3,518 \cdot 10^{-4} 1/c.$$

За час 100 с похибки становлять

$$\sigma_x = -0,8471^0; \sigma_y = 1,1637^0; \sigma_z = 2,0156^0.$$

Результати моделювання комплементарного фільтра наведено на рис. 2. Прийнято $k_2 = 0,001 c^{-2}$; $k_1 = 0,03 c^{-1}$.

Усунути вплив дрейфів гіроскопа можна введенням магнітометра у комплементарний фільтр (рис. 3).

Вихідний сигнал схеми дорівнює

$$\varphi_* = \varphi + \frac{1}{s + W_1 + W_2} \delta_1 + \frac{W_1}{s + W_1 + W_2} \delta_2 + \frac{W_3}{s + W_1 + W_2} \delta_3, \quad (6)$$

де $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – відповідно дрейф гіроскопа, завади акселерометра та магнітометра.

Прийmemo передатні функції W_1 та W_2 у вигляді

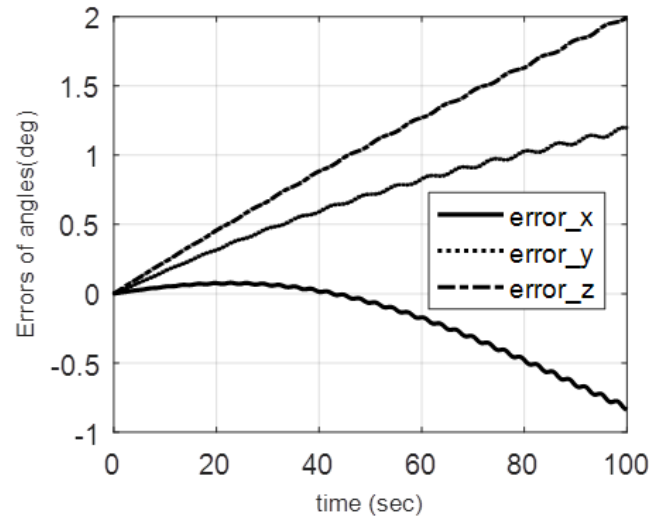


Рис. 2. Результати моделювання комплементарного фільтра

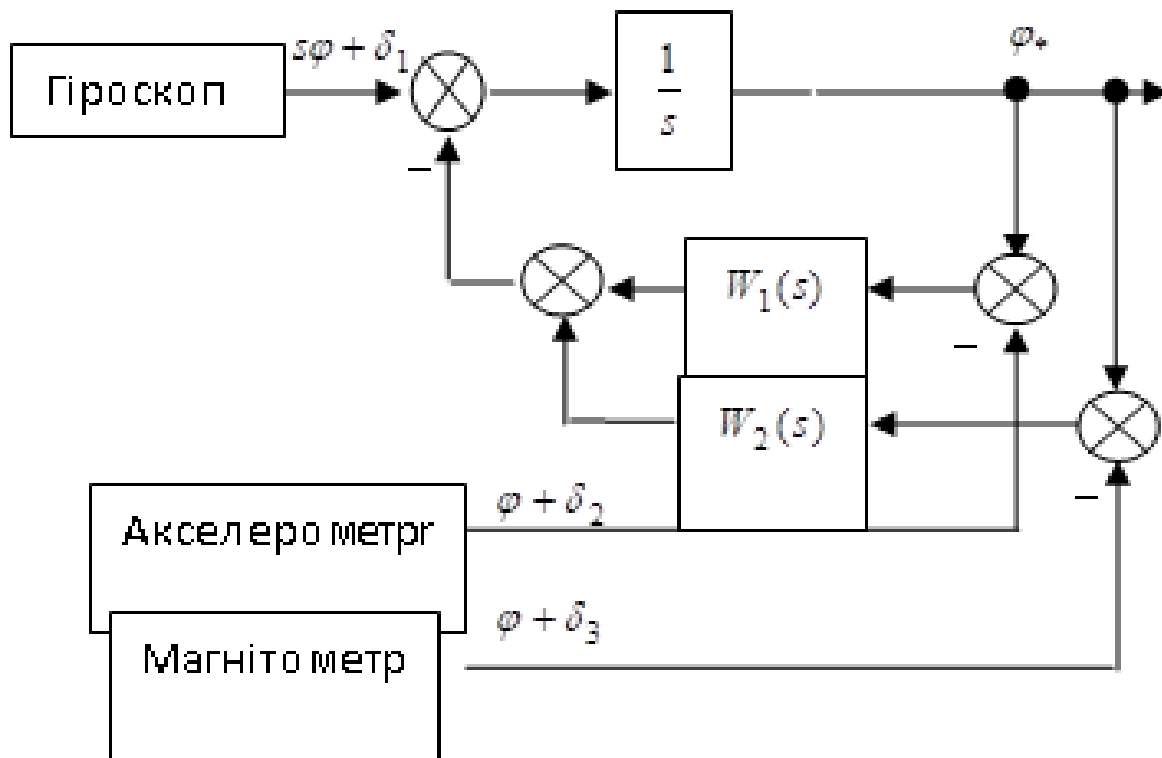


Рис. 3. Усунення впливу дрейфів гіроскопа

$$W_1(s) = k_1 + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s^2}; \quad W_2(s) = r_1 + \frac{r_2}{s}.$$

Тоді похибка фільтра буде

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{s + W_1(s) + W_2(s)} \delta_1 + \frac{W_1(s)}{s + W_1(s) + W_2(s)} \delta_2 + \frac{W_2(s)}{s + W_1(s) + W_2(s)} \delta_3 = \\ &= W_G(s) \delta_1 + W_A(s) \delta_2 + W_M(s) \delta_3, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$W_r(s) = \frac{1}{s + W_1(s) + W_2(s)} = \frac{s^2}{\Delta(s)};$$

$$W_A(s) = \frac{W_1(s)}{s + W_1(s) + W_2(s)} = \frac{k_1 s^2 + k_2 s + k_3}{\Delta(s)};$$

$$W_M(s) = \frac{W_2(s)}{s + W_1(s) + W_2(s)} = \frac{(r_1 s + r_2)s}{\Delta(s)};$$

$$\Delta(s) = s^3 + (k_1 + r_1)s^2 + (k_2 + r_2)s + k_3.$$

Відносно горизонтальних осей будуть відсутні статичні похибки не тільки від гіроскопа, але й від магнітометра. Аналіз відносно вертикальної осі еквівалентний розгляду випадку $W_1(s) = 0$. Так як при цьому $k_3 = 0$, будемо мати $W_M(0) = 1$. Тобто, буде мати місце статична похибка від магнітометра. У той же час статична похибка від дрейфу гіроскопа буде відсутня ($W_r(0) = 0$).

Висновки

Комплементарні фільтри є ефективним засобом усунення впливу дрейфу гіроскопа на точність показань. Під час оцінки точності треба враховувати характер системи координат, в якій мають місце обчислення. Належним вибором передатної функції каналу керування фільтра можна усунути статичну похибку від магнітометра відносно горизонтальних осей.

Список використаної літератури

1. *Mark Euston, Paul Coote, Robert Mahony, Jonghyuk Kim and Tarek Hamel.* A Complementary Filter for Attitude Estimation of a Fixed-Wing UAV // 2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 22-26 Sept., 2008, pp. 340-345.
2. *T. S. Yoo and S. K. Hong,* "Gain-Scheduled Complementary Filter Design for a MEMS Based Attitude and Heading Reference System", *Sensors*, vol. 11, (2011), pp. 3816-3830, doi: 10.3390/s110403816.
3. *C. Coopmans, A. M. Jensen and Y. Chen,* "Fractional-Order Complementary Filters for Small Unmanned Aerial System Navigation", *J. of intl. and robotic sys.*, vol. 73, Issue 1-4, (2014) January, pp. 429-453.