

УДК 007.52

DOI: <https://doi.org/10.20535/0203-3771472024307756>

А. С. Довгополий¹, *д.т.н., професор*, **А. В. Загірський²**, *магістр*,
О. В. Збруцький³, *д.т.н., професор*,

ОСНОВИ СТВОРЕННЯ АВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ РУХОМ НАЗЕМНОГО РОБОТИЗОВАНОГО КОМПЛЕКСУ НА МАЛИХ ДИСТАНЦІЯХ

Ua Запропоновані та розглянуті: система керування платформою для руху в наперед задану точку, кінематична схема та система керування рухом наземного роботизованого комплексу по пересіченій місцевості з перешкодами на основі системи машинного зору зі штучним інтелектом. Показано, що для забезпечення автономного руху наземного роботизованого комплексу та захисту його від впливу радіоелектронних перешкод можливо використання системи визначення орієнтації на основі сенсорів магнітного поля Землі та датчиків горизонту на МЕМС-технологіях, системи керування рухом по пересіченій місцевості на основі машинного зору та штучного інтелекту. Проведені експериментальні дослідження на макеті системи машинного зору.

En The proposed and considered: control system for traffic to a predetermined point, kinematic scheme and system of control of the traffic of the ground robotic complex in rough terrain with obstacles on the basis of a system of machine vision with artificial intelligence. It is shown that in order to ensure the autonomous movement of the ground robotic complex and to protect it from the influence of radio-electronic obstacles, it is possible to use the system of determination of orientation based on the sensors of the Earth's magnetic field and horizon sensors on memory technologies, the control system of cross-country movement on the basis of machine vision and artificial intelligence. Experimental studies on the layout of the machine vision system were conducted.

Вступ

Роботизовані комплекси (РК) зі штучним інтелектом (ШІ) набувають стрімкого розвитку та широкого застосування [1, 2]. Особливу групу серед них складають системи, у яких об'єктом керування виступає транспортний засіб: повітряний, космічний, наземний, морський тощо [3, 4]. Кожен із них має свої особливості керування рухом [5, 6] та забезпечення керованості. Керування рухом повинно враховувати наступні фактори: оточуюче середовище, динаміку, орієнтацію, навігацію, машинний зір у поєднанні із

¹ ЦНДІОВТ

² КПІ ім. Ігоря Сікорського

³ КПІ ім. Ігоря Сікорського

мініатюризацією, енергоспоживання та вартість. Побудова РК для кожного із просторів застосування за спільної ідеології має свої специфічні особливості. Так необхідність зменшення втрат на полі бою зумовила зростання числа наземних роботизованих комплексів (НРК) здебільшого із дистанційним керуванням на типових колісних або гусеничних шасі [7, 8, 9], які можуть рухатись по поверхні з хорошим покриттям та нескладними перешкодами та кривизною. У роботі [10] показано, що більші можливості руху мають колісні шасі, у яких реалізоване жорстке щеплення коліс із поверхнею більшої площі, а умови статичної стійкості НРК виконуються забезпеченням необхідних пропорцій його конструкції [11]. Тоді для забезпечення руху НРК по похилій площині та за наявності перешкод необхідно мати необхідну потужність привідних двигунів. У [10] запропоновані методи вибору типу колісного шасі (із одноколісним приводом, із двох, трьох і чотирьох променевими траверсами із обертанням) у залежності від рельєфу поверхні, по якій повинен рухатись НРК. У роботі [10] показано, що під час руху НРК по похилій площині та за наявності перешкод найбільш ефективним є шасі із двопроменевою траверсою із обертанням. Таке шасі з проміжним колесом долає найбільшу висоту перешкоди, а також дозволяє рухатись НРК по сходах. У роботі отримані залежності моменту на валу від параметрів шасі та умов руху.

Досвід ведення бойових дій показує широке застосування засобів радіоелектронної боротьби (РЕБ), як проти безпілотних літальних апаратів (БПЛА), так і НРК. Тому в світі зростає тенденція підвищення автономності РК, у тому числі за рахунок використання автономної навігації, систем технічного зору (СТЗ) та штучного інтелекту [12, 13, 14]. Актуальною проблемою є створення НРК із автономною системою керування для забезпечення підрозділів безпосередньо на лінії зіткнення та у режимі «камікадзе» за умов РЕБ. Як правило, дистанції застосування таких НРК близькі до 1 км, але рельєф місцевості може мати похилі траєкторії та суттєві перешкоди руху. У той же час у таких НРК є жорсткі обмеження щодо масогабаритних характеристик та вартості його підсистем. Використання гіроскопічних безплатформних інерціальних навігаційних систем (БІНС) із точністю визначення місцеположення у декілька десятків метрів за 5 хвилин руху зумовить значне зростання вартості системи. Кращі з більш бюджетних малогабаритних БІНС забезпечують точність до 300 м за такий же інтервал руху [15]. Тому застосування таких систем авторами не розглядається. Виходячи з цього, у статті запропоновано створення автономної системи керування рухом НРК на основі магнітометрів і датчиків горизонту, СТЗ та ШІ.

Постановка задачі

Метою статті є розробка основ створення малогабаритної автономної системи керування рухом НРК малого радіусу дії по місцевості зі складним рельєфом, наявністю перешкод та дії радіоелектронних завад.

Забезпечення заданого напрямку руху на пересіченій місцевості

Розглянемо рух НРК із деякої точки E у точку F за умов відсутності зовнішньої навігаційної інформації (сигналу GPS) із вимогою мінімізації габаритів та вартості САК. Для забезпечення такого руху потрібно мати інформацію про курс (у площині горизонту) та пройдений шлях, віднесений до площини горизонту, який буде визначати положення НРК відносно кінцевої точки F руху. Використання для цього сучасних інерціальних навігаційних систем (ІНС) та БІНС із точністю декількох миль за годину роботи не дозволяє забезпечити бюджетність та малогабаритність системи. Але під час використання НРК на невеликих відстанях та можливостях наведення на орієнтир за допомогою ШІ у кінцевій точці руху, задача навігації може бути вирішена використанням системи на МЕМС – сенсорах. Для визначення курсу застосуємо магнітну систему з аналітичним обчислення кута курсу та компенсацією карданової похибки цієї системи вимірюванням кутів відхилення НРК від площини горизонту системою датчиків горизонту. На рис. 1 показана структура системи керування НРК із системою вимірювання курсу по магнітному курсу Землі, датчиками горизонту та СТЗ із ШІ та контролером.



Рис. 1. Структура системи керування НРК

Контролер розраховує відхилення НРК від заданого курсу, по інформації СТЗ визначає пройдений шлях, наявність перешкод руху НРК та керує привідною системою і корисним навантаженням. На рис. 2 наведена схема визначення курсу магнітними сенсорами у горизонтальній площині. Для цього використовується залежність (рис. 2)

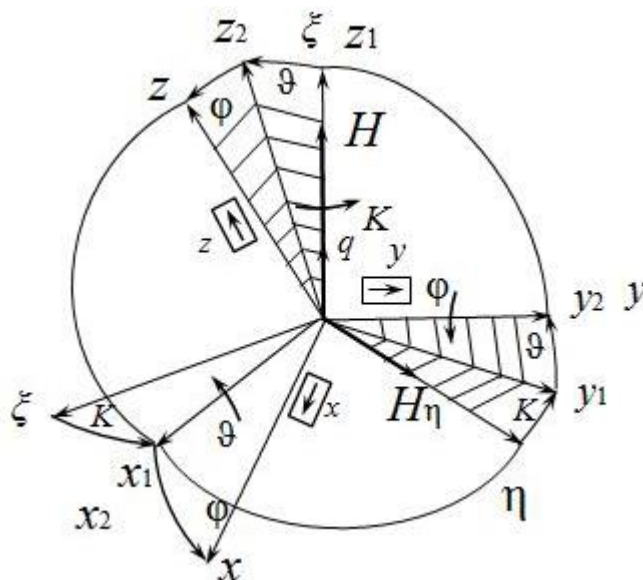
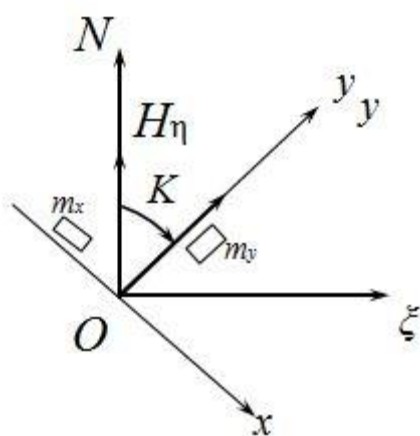


Рис. 2. Визначення кута курсу Рис. 3. Кінематика поворотів систем координат

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} K_n &= m_x / m_y = (H_\eta \cdot \sin K + \Delta m) / (H_\eta \cdot \cos K + \Delta m), \\ \Delta K &= K_n - K = \Delta m (\cos K - \sin K) / H_\eta, \end{aligned} \quad (1)$$

де H_η – північна складова вектору індукції магнітного поля Землі, K – кут курсу НРК, K_n – обчислений кут курсу, Δm – похибка магнітометра, ΔK – похибка обчислення кута курсу, яка може складати величину 1...3 град [16]. Похибка визначення місцезнаходження НРК після проходження відстані $EF = L$ від т. E до т. F буде

$$\Delta S = L \cdot \operatorname{tg} \Delta K \approx L \Delta K \quad (2)$$

може мати значення 17 ... 50 м за $L = 1000$ м. Похибка вимірювання курсу (1) суттєво залежить від відхилення площини магнітометрів (m_x, m_y) від горизонтальної (рис. 3) (карданова похибка [17]). На рис. 3 показана кінематика поворотів бортової систем координат (СК) $Oxyz$ НРК відносно географічної СК $O\xi\eta\zeta$, яка пояснює карданову похибку. Горизонтування площини магнітометрів застосуванням стабілізованої платформи може бути універсальним рішенням, але це ускладнює систему керування, особливо у разі недоцільності горизонтування системи технічного зору. Останню, в багатьох випадках, потрібно мати жорстко зв'язаною із корпусом НРК під час його руху по перетнутій поверхні. Для уникнення карданової похи-

бки застосуємо аналітичне обчислення кута курсу та визначаємо кути нахилу НРК до площини горизонту. Оптимальним вирішенням цієї задачі може бути застосування методу триад [18, 19]. Використаємо тривісні блоки магнітометрів та датчиків горизонту. Алгоритм визначення кутів курсу, тангажу ϑ та крену φ (рис. 3) буде наступним. Задамо зв'язок географічної СК $O\xi\eta\zeta$ із бортовою СК $Oxyz$ матрицею D (3)

$$D = \|d_{ij}\| =$$

	ξ	η	ζ
x	$d_{11} = \cos K \cdot \cos \varphi \cdot \sin K \times$ $\times \sin \varphi \cdot \sin \vartheta$	$d_{12} = \sin K \cdot \cos \varphi +$ $+ \cos K \cdot \sin \varphi \cdot \sin \vartheta$	$d_{13} = -\sin \varphi \cos \vartheta$
y	$d_{21} = -\cos \vartheta \cdot \sin K$	$d_{22} = \cos \vartheta \cos K$	$d_{23} = \sin \vartheta$
z	$d_{31} = \cos K \cdot \sin \varphi +$ $+ \sin K \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta$	$d_{32} = \sin \varphi \cdot \sin K -$ $- \cos \varphi \cdot \cos K \cdot \sin \vartheta$	$d_{33} = \cos \varphi \cos \vartheta$

$$[x \ y \ z]^T = D [\xi \ \eta \ \zeta]^T. \quad (4)$$

Сформуємо ортогональні вектори у СК $O\xi\eta\zeta$: нормовані вектори індукції магнітного поля

$$\vec{h}_0 = \vec{H} / \text{norm}(\vec{H}) = \vec{H} / (H_\xi^2 + H_\eta^2 + H_\zeta^2)^{1/2} = [0 \ h_\eta \ h_\zeta],$$

прискорення вільного падіння g $\vec{g}_0 = \vec{g} / g = [0 \ 0 \ -1]$, векторні добутки $\vec{b}_1 = \vec{h}_0 \times \vec{g}_0$, $\vec{b}_2 = \vec{h}_0 \times \vec{b}_1$, та матрицю цих векторів $M_g = [\vec{h}_0 \ \vec{b}_1 \ \vec{b}_2]$.

Такі ж вектори сформуємо у СК $Oxyz$ із вихідних сигналів магнітометрів та датчиків горизонту: нормовані вектори магнітометрів

$$\vec{m}_b = \vec{M} / \text{norm}(\vec{M}) = \vec{M} / (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2)^{1/2} = [\vec{m}_x \ \vec{m}_y \ \vec{m}_z],$$

датчиків горизонту $\vec{a}_b = \vec{A}_b / \text{norm}(\vec{A}_b) = [\vec{a}_x \ \vec{a}_y \ \vec{a}_z]$, векторні добутки $\vec{c}_1 = \vec{m}_b \times \vec{a}_b$, $\vec{c}_2 = \vec{m}_b \times \vec{c}_1$ та матрицю $M_b = [\vec{m}_b \ \vec{c}_1 \ \vec{c}_2]$.

Тоді з (4) $M_b = DM_0$, та

$$D = M_b M_0^{-1}. \quad (5)$$

Із (5) та (3) отримаємо

$$\text{tg} \vartheta = d_{23} / (d_{21}^2 + d_{22}^2)^{-1/2}, \quad \text{tg} \varphi = -d_{13} / d_{33}, \quad \text{tg} K = -d_{21} / d_{22}. \quad (6)$$

Із (3) та (6) можна виразити значення кутів через вихідні сигнали магнітометрів (m) та датчиків горизонту (a):

$$\text{tg} \vartheta = -a_y / (g^2 - a_y^2)^{-1/2}, \quad \text{tg} \varphi = -a_x / a_z, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg}K = \left[H_{\eta}^2 (g^2 - a_y^2) - (gm_y + H_{\zeta} a_y)^2 \right]^{1/2} / (gm_y + H_{\zeta} a_y).$$

Отримані вирази забезпечують визначення просторової орієнтації НРК у географічній СК, яка необхідна для забезпечення руху по заданій траєкторії.

Використання технічного зору для компенсації курсової похибки

Рух по перетнутій місцевості спричиняє відхилення від прямолінійної траєкторії заданого напрямку від E до F . Для точного досягнення кінцевої точки F необхідно забезпечувати повернення НРК на попередню траєкторію після закінчення маневру по курсу та за сприятливих умов руху. Бокове відхилення від заданого курсу K_0 може бути визначене за поточним курсом K та поточним переміщенням S :

$$\Delta S_n = \int \operatorname{tg}(K - K_0) \cdot dS.$$

За умов відсутності сигналу *GPS* та у разі використання спеціальних шасі [10] переміщення S отримаємо із відеокамери СТЗ. Залежність між переміщенням S шасі НРК та переміщенням ℓ зображення орієнтира місцевості на матриці камери СТЗ (передавальна характеристика), яка отримана експериментально на лабораторному зразку СТЗ із камерою *SM-M526BLBH*, показана на рис. 4. Для цього камера встановлювалась на шасі НРК під кутом α до площини шасі. Задавалось переміщення шасі по горизонтальній площині на задану відстань S та фіксувалось на камері переміщення зображення вибраного на місцевості орієнтира у пікселях та у долях ℓ до висоти ℓ_0 матриці камери. Як бачимо із рис. 4, отримана характеристика може бути описана функцією $S = K(\alpha) \operatorname{tg} \ell / \ell_0$, коефіцієнт крутизни якої визначається кутом α нахилу камери до поверхні руху НРК. Із характеру цієї функції (рис. 4) слідує, що для підвищення точності визначення переміщення доцільно проводити вимірювання переміщення зображення орієнтира на матриці в її нижній області ($\ell / \ell_0 < 1/2$), де функція наближається до лінійної. Тоді можна прийняти для переміщення S_i НРК на i -й ділянці траєкторії та для повного переміщення S залежності.

$$S_i = K_c \ell_i, \quad S = \sum_{(i=1)}^N S_i, \quad (8)$$

де K_c – калібровочний коефіцієнт камери, також залежний від кута α . Переміщення НРК, віднесене до площини горизонту ($S_{\xi\eta}$), визначиться як проекція S (8) на площину $\xi O \eta$: $S_{\xi\eta} = S \cdot \cos(\vec{S}, \vec{S}_{\xi\eta})$. Із (3) знайдемо

$$\cos(\vec{S}, \vec{S}_{\xi\eta}) = S_{\xi\eta} / S = (d_{21}^2 + d_{22}^2)^{1/2} = \cos\vartheta = \left[1 - (a_y / g)^2\right]^{1/2},$$

$$S_{\xi\eta} = S \cdot \cos\vartheta.$$

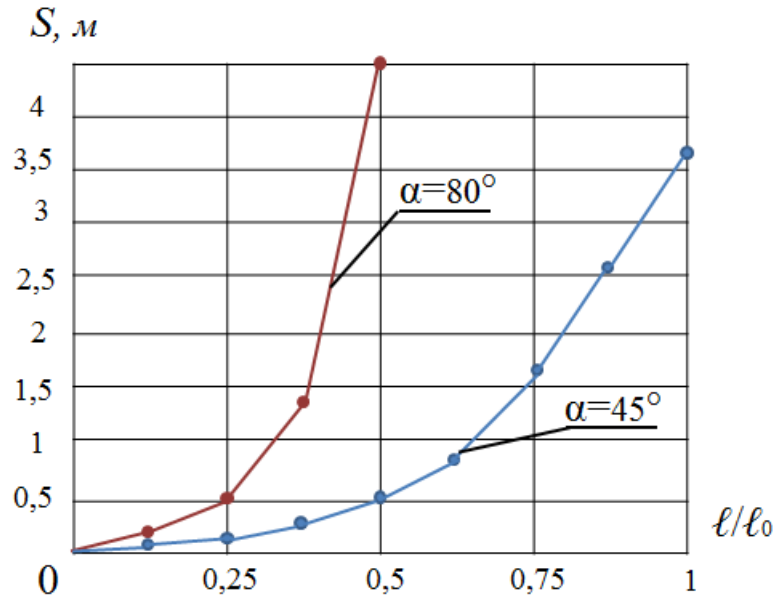


Рис. 4. Характеристика залежності відстані до зображення та його положення l на матриці камери, l_0 – висота матриці

Ці вирази дозволяють обчислити пройдений НРК шлях, віднесений до заданої траєкторії руху, та визначити його положення відносно кінцевої точки F траєкторії.

Рух по перетнутій поверхні

Прийmemo за перетнуту поверхню із пагорбами та заглибленнями різної кривини. Можливість руху НРК по такій поверхні визначається типом кінематичної схеми шасі, кількістю ведучих коліс та потужністю двигуна приводу [10]. Ці характеристики вибираються під час розробки НРК та закладаються у пам'ять бортового контролера НРК. У разі руху по поверхні система орієнтації НРК визначає кути нахилу шасі (3). За їх значеннями та за відомими характеристиками шасі та НРК алгоритм керування рухом оцінює можливість руху по такій поверхні та приймає рішення про його продовження визначеним курсом, чи обминання цієї ділянки.

Рух по поверхні з перешкодами

За перешкоди приймаємо сторонні предмети (природні та штучні), розташовані на поверхні по траєкторії руху НРК. Для сегментації предметів, що знаходяться на траєкторії руху, на перешкоди та віддалені від перешкоди, виділимо на зображенні (матриці) камери СТЗ область, ширина V

якої відповідає необхідній ширині полоси поверхні для вільного руху НРК (рис. 5) відповідно габаритам шасі.

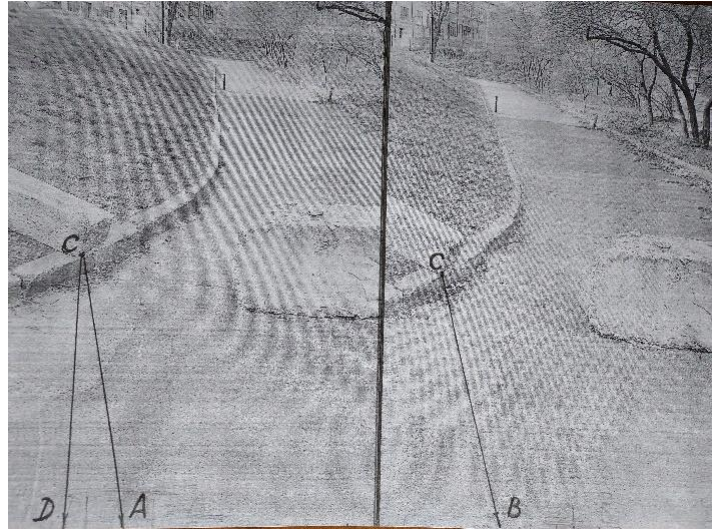
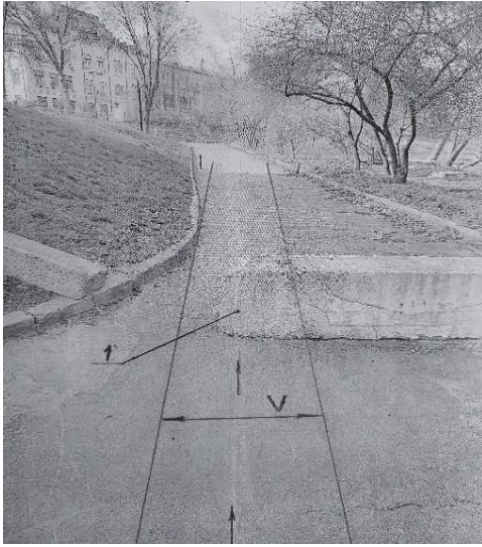
Рис. 5. Полоса V руху

Рис. 6. Зображення поверхні руху на двох камерах

Після сегментації предметів на полосі V виділяються найближчі до НРК об'єкти (l , рис. 5). Відстань до них (у разі значень $l/l_0 < 1/2$, рис. 4) може бути визначена СТЗ за передавальною характеристикою камери (9). Якщо відстані більші за $0,5l$ на матриці, похибка вимірювання різко зростає. Це в свою чергу впливає на точність визначення часу початку маневру НРК за необхідності обминання об'єкта – перешкоди. Більшу точність визначення відстані до об'єкта дає геометричний спосіб із використанням СТЗ із двома відеокамерами (рис. 6), розташованими на шасі на відстані AB одна від одної. Одна із камер (наприклад, права) фіксує один із характерних фрагментів (C) об'єкта (наприклад, за яскравістю зображення [20]), визначається його кутове положення Ψ_1 відносно оптичної осі камери. Цей фрагмент передається для розпізнавання на другу (ліву) відеокамеру та визначається його кутове положення Ψ_2 відносно оптичної осі другої камери. За отриманими даними будується трикутним ABC за відомою стороною AB та всіма кутами α, β, γ (рис. 7). Із трикутника знаходимо відстань CD до об'єкта.

$$CD = AB \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot (\sin \gamma)^{-1} . \quad (9)$$

Кутове положення фрагмента об'єкта відносно оптичної осі відеокамери визначається під час обробки зображення по передавальній характеристиці камери поперечних переміщень (рис. 8) $\Psi = K_\Psi h_c$, де K_Ψ – калібровочний коефіцієнт камери, h_c – відстань у пікселях до зображення на матриці камери від її вертикальної середньої лінії.

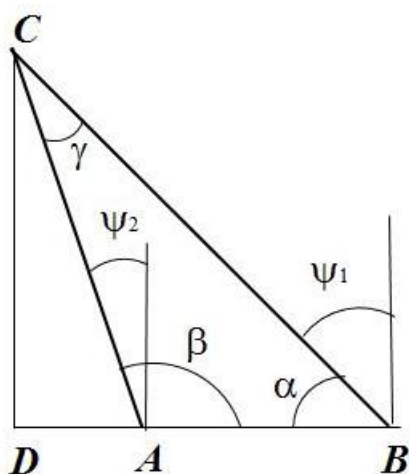


Рис. 7. Геометрична модель визначення відстані

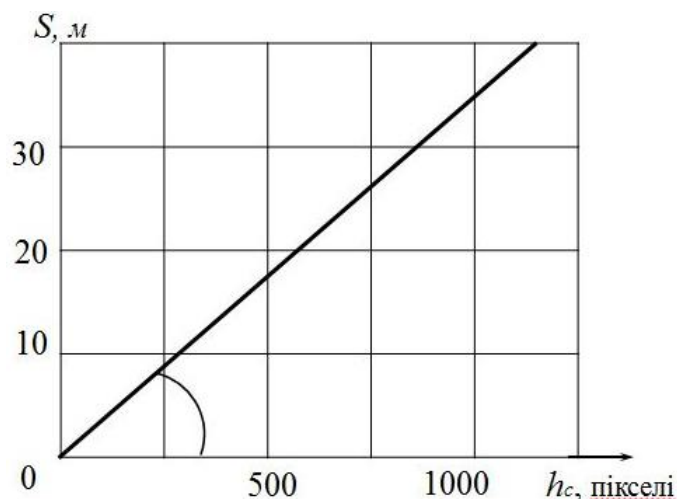


Рис. 8. Характеристика камери для поперечних переміщень

Структура геометричної моделі визначення відстані CD (рис. 7) та (9) вказує на зростання похибок обчислення у разі малих кутів γ , що має місце за великих відстанях до об'єкту та його розташуванню за межами полоси руху. Похибка зменшується за кутів α та β , менших 90 градусів. Це відповідає знаходженню об'єкта на полосі руху. Адекватність та достовірність отриманих залежностей ((9), рис. 8) перевірені експериментально на лабораторному зразку СТЗ на місцевості. Результати експериментів наведені у таблиці. В ній показані середні значення параметрів, отриманих вимірюваннями у 4-х експериментах із середньоквадратичним відхиленням (СКВ) до 8% , та середні значення параметрів, обчислені із використанням виразу (9) та характеристики камери (рис. 8) із СКВ до 7% .

Таблиця.

Експериментальне визначення відстані двома камерами *SM-M526BLBH*

Параметр	K_{ψ} , ° / Кпіксел	h_{C1} , Кпіксел	h_{C2} , Кпіксел	Ψ_1 , град	Ψ_2 , град	AB , м	BC , м	CD , м
виміряні значення (середні)	0,06	290	100	16	5	0,64	3,12	3,0
обчислені значення (середні)				17,4	5,6		2,97	2,73
Похибка, %				6	11		5	9

Результати експерименту показують, що на невеликих відстанях до перешкод (до 5 м) точність визначення положення їх положення за допо-

могою СТЗ достатня для подальшого прийняття рішення системою керування рухом НРК.

Повернення на траєкторію після маневру обминання перешкоди

Це є необхідною умовою точного досягнення кінцевої точки F . Легко визначити що рух попереднім курсом (з попереднім значенням кута курсу) після бокового зміщення ΔS_n із заданої траєкторії буде відбуватись по іншій траєкторії, наближено паралельній заданій траєкторії. Тому некомпенсоване бокове зміщення зумовлює такої ж величини похибку кінцевого положення НРК незалежно від похибок визначення курсу. Для повернення НРК на задану траєкторію необхідно забезпечити

$$\sum_{(i-1)}^n \sum S_{ni} = \int_E^F \operatorname{tg}(K - K_0) dS_{\xi\eta} = 0,$$

Обчислення пройденого шляху, зведеного до заданої траєкторії EF , визначається як

$$S_{EF} = \int_E^F \cos(K - K_0) dS_{\xi\eta} = \int_E^F \cos(K - K_0) \cos \vartheta dS$$

за поточними значеннями кутів курсу K та тангажу ϑ , прирощенням переміщення dS по перетнутій поверхні.

Розробка структур та алгоритмів САК рухом НРК складає окрему самостійну задачу і залежить від кінематичної схеми шасі, структури силової системи у разі забезпечення керованості НРК [10]. До такого ж класу задач відноситься визначення достовірності досягнення кінцевого пункту розпізнаванням об'єктів та ідентифікацією заданого орієнтира [20, 21] із використанням ІІІ.

Висновки

Для забезпечення автономного руху наземного роботизованого комплексу (НРК) та захисту від впливу радіоелектронних перешкод можливо використання системи визначення орієнтації НРК на основі сенсорів магнітного поля Землі та датчиків горизонту на МЕМС-технологіях, системи керування рухом по пересіченій місцевості на основі технічного зору та штучного інтелекту. Проведені експериментальні дослідження на макеті системи технічного зору показали можливість реалізації таких систем з достатньою точністю. Система технічного зору зі штучним інтелектом може забезпечити корекцію кінцевого положення комплексу по відомих орієнтирах.

Список використаної літератури

1. *Janusz Kasprzyk*. Robot Intelligence Technology and Applications// Warsaw: Springer. - 2014.- 610 p.
2. *Zoran Gacovski*. Mobile Robots – Current Trends.//Rijeka: In Tech.- 2011.- 414 p.
3. Роботизована платформа Скорпіон [електронний ресурс] режим доступу: <https://temerland.com/rishennya/robotizovana-platforma-scorpion/>
4. *Xin Wu, Wei Li, Danfeng Hong, Ran Tao, Qian Du*. Deep Learning for UAV-based Object Detection and Tracking: A Survey// IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine.-2021.- <https://doi.org/10.1109/MGRS.2021.3115137> .
5. *Блінцов В. С., Алоба Л. Т., Надточій А. В., Надточій В. А.* Основи автоматичного керування групою автономних ненаселених підводних апаратів/Херсон.- НУК.- 2022. – 146 с.
6. *Burnashev V., Zbrutsky A.* Robust controller for supersonic unmanned aerial vehicle // Aviation. – 2019. - №23, P. 31-35.
7. *Залипка В. Д.* Особливості створення та застосування наземних роботизованих комплексів у провідних країнах світу та Україні// Науковий вісник НЛТУ України.- 2022.- Т. 32- № 4. - С. 60–65.
8. *Струтинський, В. Б., Гуржій А. М.* Наземні роботизовані комплекси Електронний ресурс. - Житомир : ПП "Рута", 2023. - 497 с.
9. ТОП-5 наземних роботизованих колісних систем України. <https://www.armyfm.com.ua/tehnika-vijni-top-5-nazemnih-robotizovanih-kolisnih-sistem-ukraini/>
10. *Довгополий А. С., Загірський А. В.* Механіка та керуваність безпілотних наземних роботизованих комплексів в умовах складного рельєфу//Механіка гіроскопічних систем.- №46.-2023.-С.6-21.
11. *Павловський М. А.* Теоретична механіка//К.-Техніка - 2002.- 512с.
12. *Michele Mancini, Gabriele Costante, Paolo Valigi, Thomas A. Ciarfuglia.* Fast Robust Monocular Depth Estimation for Obstacle Detection with Fully Convolutional Networks// IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS -2016)
13. *Lihe Yang, Bingyi Kang, Zilong Huang, Xiaogang Xu, Jiashi Feng, Hengshuang Zhao* Depth Anything: Unleashing the Power of Large-Scale Unlabeled Data//CVPR 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2401.10891>
14. *Шаре Пол.* Невидима армія. Автономна зброя та майбутнє війни//К.-Форс Україна.-2023.- 448с.

15. *Нестеренко О. І.* Особливості похибок мікромеханічної інерціальної навігаційної системи у автономному режимі роботи// XXIII Міжнародна конференція «Приладобудування».- К.: НТУУ «КПІ», 2024. – с. 28-31.
16. *Нестеренко О. І., Денисенко Ю. І.* Метод автоматичного визначення та врахування залишкової девіації індукційного компаса// «Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки»: Збірка доповідей. – К.: НТУУ «КПІ», 2007. – с. 306-311
17. *Збруцький О. В., Довгополий А. С., Нестеренко О. І., Григор'єв В. М.* Гірокомпаси для навігації та наведення//К.-КПІ ім.І.Сікорського.-2017.- 199с.
18. *Melashchenko O., Rizhkov L., Stepurenko D.* Analysis of the determination algorithms for the designation of orientation / / Mechanics of gyroscopic systems.- № 21.- 2011.- p. 44-57.
19. *Zbrutsky O.* System definition of micro - nano satellite orientation/ O. Zbrutsky, V. Meleshko, A.Ganja, S.Tarnavsky, O.Bondarenko, S.Ponomarenko, K.Saurova// Mechanics of gyroscopic systems.- № 43.- 2022.- p.46-60.
20. *Котвицький Р. С., Сарибога Г. В., Збруцький О. В.* Автоматичне керування оптичною віссю камери на основі системи технічного зору з використанням методу ідентифікації об'єктів за кольором// Інформаційні системи, механіка, керування.-Вип.13.- 2016.- с.111-116.
21. *Licheng Jiao, Fan Zhang, Fang Liu, Shuyuan Yang, Lingling Li, Zhixi Feng, Rong Qu.* A Survey of Deep Learning-based Object Detection// Computer Science.-2019.- <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2939201>
22. *Alessandro Palmas, Pietro Andronico.* Deep Learning Computer Vision Algorithms for Real-time UAVs On-board Camera Image Processing// Turin, Italy.- 2022.-<https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.01037>.

УДК 629

DOI: <https://doi.org/10.20535/0203-3771472024307719>П. В. Лук'янов⁴, к.ф.-м.н., с.н.с., К. С. Павлова⁵, PhD студентка

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА В МОДЕЛІ СИСТЕМИ ПЕРВИННОГО КОНТРОЛЮ ПОЛЬОТОМ

Ua

У роботі вдосконалено математичну модель, що описує процес керування закрилками малих літаків. На підставі аналізу наявних робіт доведено фізичну необґрунтованість спрощення моделі процесу первинного контролю польотом літака. Зазначено неправомірне спрощення при опису кінематики руху системи шток-закрилок. Використовується сучасний підхід (модель тертя Штрибека) щодо моделювання тертя в електромеханічному приводі. Наведені результати числових розрахунків руху системи шток-закрилок підтверджують нелінійний характер динаміки системи «шток - закрилок».

En

In this paper, a mathematical model describing the flap control process of small aircraft is improved. On the basis of the analysis of existing works, the physical groundlessness of the simplification of the model of the process of primary flight control of the aircraft has been proven. An improper simplification was noted when describing the kinematics of the rod-valve system movement. The paper uses a modern approach (Stribek's friction model) to model friction in an electromechanical actuator. The given results of numerical calculations of the movement of the rod-valve system confirm the nonlinear nature of the dynamics of the "rod-valve" system.

Вступ

Розвиток авіації пов'язаний із збільшенням швидкості літака. Як наслідок, швидкодія та точність управління системою первинного контролю польоту також збільшується. Незважаючи на значний прогрес у розвитку комп'ютерної техніки, зазначені характеристики (швидкість та точність управління) знаходяться у прямій залежності від математичних моделей, які використовуються для опису зазначеного процесу.

Попередні кілька десятиліть охарактеризувалися в авіації поступовим переходом від механічних до електромеханічних систем управління [1, 2]. В даний час, поряд із гідравлічними, в авіації використовуються також електрогідростатичні та електромеханічні приводи. У роботах [3, 4] наведено математичні моделі цих приводів. Ретельний фізичний та математичний аналіз цих моделей дозволив виявити їхні слабкі місця (недоліки). У роботі розглядається електромеханічний привід та його використання у системі управління закрилками (первинне керування польотом). Йти-

⁴ Національний авіаційний університет

⁵ Національний авіаційний університет

меться про недоліки моделі, що описує функціонування системи електро-механічний привід – закрилки. Таким недоліком є невиправдана лінеаризація математичної моделі та, як наслідок, втрата точності управління [5]. Іншим спрощенням є лінеаризація кінематики та, як наслідок, динаміки руху закрилок [3, 4].

Нарешті, третім слабким місцем є використання для опису функціонування електромеханічного приводу моделі тертя Штрібека, яка, як показали дослідження, трактується по-різному (неоднозначно): функціональна залежність коефіцієнта тертя від безрозмірного параметра (числа Херсі) апроксимується різними авторами по-різному. Причина такого розмаїття пояснюється складністю кількісних вимірів у широкому діапазоні зміни числа Херсі [6], і це призвело до ситуації, коли у більшості джерел крива Штрібека дається без вказівок на кількісні співвідношення. Тому не дивно, що у сучасних моделях електромеханічного приводу тертя описується формальною вказівкою на його характер (тертя Штрібека).

Оскільки мала авіація, а також особливо безпілотна мала авіація, має неабияке значення у сучасному житті, тому дослідження щодо вдосконалення систем первинного контролю літака є актуальними.

Робота [6] присвячена законам тертя мастила у горизонтальних опорних підшипниках. Як вказує Херсі, занадто короткі підшипники схильні до абразії (механічних пошкоджень) внаслідок тертя. З іншого боку, надто довгі підшипники спричиняють непотрібну дисипацію енергії. На статтю Херсі вказано у роботі [7], де коефіцієнт тертя розглядається як функція числа Херсі

$$\mu = \mu \left(\frac{\eta N}{P} \right),$$

де у дужках безрозмірна комбінація (добуток динамічної в'язкості η на частоту N , що ділиться на тиск P). Робота [7], зокрема, вказує на технічні складності отримання явної залежності коефіцієнта тертя від числа Херсі протягом майже ста років – до середини 2000-х. Модель тертя, що використовується у сучасних дослідженнях – це модель Штрібека [8, 9], яка дозволяє враховувати широкий діапазон робочих умов.

Позитивна сторона моделі Штрібека, тобто її широкий діапазон використання, обумовила складність її кількісного опису: однозначного універсального закону у вигляді аналітичної функції поки ще не існує. У доступних джерелах можна знайти два схожих закони:

$$F = \sqrt{2e} (F_{br} - F_C) \exp\left(-\left(V / V_{St}\right)^2\right) \frac{V}{V_{St}} + F_C \tanh(V / V_C) + fV, \quad (1)$$

$$F_{p,s} = F_C \left[(F_{br} - F_C) \cdot \exp\left(-V_{piston} / V_L\right) + k_V |V_{piston}| \right]. \quad (2)$$

У формулах (1) – (2) F_{br} , F_C – сили тертя спокою та кулонівське тертя;

V , V_{St} , V_{piston} , V_L – відповідні швидкості; f , k_v – емпіричні коефіцієнти.

Оскільки будь-яка математична модель так чи інакше використовує конкретні параметри, то у зв'язку з цим представляє інтерес робота [10].

Огляд електромеханічних приводів слід почати із оглядової роботи [5], у якій розглянуто всебічні аспекти електричних систем літальних апаратів. Центральною роботою, цитованою у [5], та використаною у даній роботі є стаття [8], в якій розглянуто взаємозв'язок електрогідростатичного та електромеханічного приводу із поверхнею управління (закрилки - передкрилки).

Моделі, що дозволяють проводити попереднє конструювання електромеханічних приводів, розглянуті в [11]. У зв'язку із щойно наведеною роботою, важливе значення щодо спокійним до відмови управлінням для систем первинного контролю польотом має [12].

Нарешті, огляд робіт завершимо тематикою керування. Система керування передкрилками та закрилками розглянута у роботах [13 – 14]. Так у [13] йдеться про створення адекватної динамічної моделі, тоді як спрощеній моделі присвячена робота [14]. Крім контрольних поверхонь, електропривод також використовується у кермовому управлінні. Питанням конструювання контролерів на електрогідравлічних приводах присвячена робота [15]. Аналітичний підхід до керування системою лінійного гідравлічного приводу розглянуто у [16].

Постановка задачі

Метою дослідження даної роботи є виявлення важливості нелінійності у кінематиці моделі системи первинного контролю польотом.

Нелінійна динаміка взаємопов'язаного руху штока електромеханічного приводу та закрилки

Детальне дослідження існуючого моделювання виявило відсутність належного опису кінематичного зв'язку «зміна довжини штока – кут повороту закрилок» та врахування змінності у часі навантаження на штоку та моменту зусиль, що діє на закрилки. Розглянемо кінематику та динаміку системи «шток-закрилки». За основу візьмемо схему, наведену у роботі [10].

Система має три осі обертання у точках O_1 , O_2 та $A_{1,2}$. Тому справедливі такі співвідношення:

$$O_1O_2 = a = const; \quad A_1B_1 = A_2B_2 = const; \quad O_2B_1 = O_2B_2 = l_j = const$$

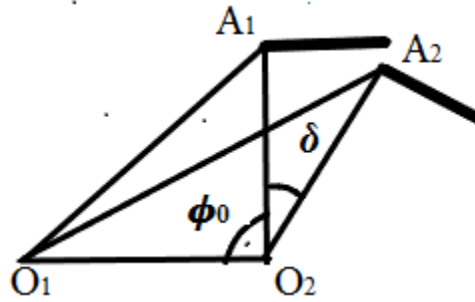


Рис. 1. Схема кінематики системи «шток ЕМП-закрилок»

$\delta(x) = \varphi_{flap}$ – кут повороту закрилок від початкового положення φ_0 , O_1A_1 та O_2A_2 – довжини відстань між осями повороту O_1 та A_i , ($i=1,2$). Довжина O_1A_1 змінюються у часі і тому позначена невідомою x . У довільний момент часу має місце співвідношення:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_0 + \delta(x)) &= \left(a^2 + l_j^2 - (x_0 + x)^2 \right) / 2a \cdot l_j. \\ \cos(\pi/2 + \delta(x)) &= -\sin(\delta(x)) = \sin(\varphi_{flap}(x)) = \\ &= \left[(x_0 + x)^2 - (a^2 + l_j^2) \right] / (2al_j) \end{aligned}$$

Момент сили навантаження на штоку відносно точки O_2 дорівнює:

$$M_j = -F_L \cdot \sin \varphi_{flap}(x) l_j = -F_L \left[(x_0 + x)^2 - (a^2 + l_j^2) \right] / 2a.$$

Другим є момент сили опору закрилок M_h . Для знаходження взаємозв'язку між довжиною штоку електромотору та кутом повороту закрилок, використаємо рис. 1. Нехай $\angle O_1O_2A_1 = \beta_0 = \pi/2 \Leftrightarrow \delta(x) = 0$. Тоді у довільний момент часу маємо:

$$\delta(x) = -\beta_0 + \arccos \left(\frac{a^2 + l_j^2 - \left(\sqrt{a^2 + l_j^2} - x \right)^2}{2al_j} \right). \quad (3)$$

Для подальшого нам знадобляться значення першої та другої похідних кута повороту закрилок за часом. Обчисли їх. На підставі (3) маємо:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{2al_j \left(\sqrt{a^2 + l_j^2} + x \right)}{\sqrt{(2al_j)^2 - \left(a^2 + l_j^2 - \left(\sqrt{a^2 + l_j^2} - x \right)^2 \right)^2}} \frac{dx}{dt} = F_1(x) \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = f_2\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) = F_1(x) \frac{d^2x}{dt^2} + F_2(x) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

$$F_2(x) = \left(1 - \left(\left(a^2 + l_j^2 - \left(\sqrt{a^2 + l_j^2} - x\right)^2\right) / 2al_j\right)^2\right)^{-0,5} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + l_j^2} - x\right)^2 \times$$

$$\times \left(a^2 + l_j^2 - \left(\sqrt{a^2 + l_j^2} - x\right)^2\right)^2 2al_j \left(\sqrt{\left(2al_j\right)^2 - \left(a^2 + l_j^2 - \left(\sqrt{a^2 + l_j^2} - x\right)^2\right)^2}\right)^{-3}$$

Повна система рівнянь, що описує модель ЕМП – закрилок

Застосуємо до закрилок закон зміни кінетичного моменту. Для обертання навколо осі у точці O_2 цей закон спрощується до одного скалярного рівняння

$$J \frac{d^2\delta}{dt^2} = \sum_i M_i^e,$$

де M_i^e – сума моментів зовнішніх сил, що діють на закрилок. Із наведеного рівняння отримуємо наступне:

$$f_2\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) J = M_h(t) - F_L(t) l_j \sqrt{1 - \left(\left(x^2 + l_j^2 - a^2\right) / 2l_j x\right)^2}. \quad (4)$$

Рівняння (4) – нелінійне і розв'язується лише чисельно. Якщо позначити хід штока електроприводу як $x = x_{ema}$, то відповідне рівняння має вигляд [9]

$$m_{ema} \frac{d^2 x_{ema}}{dt^2} = c_{BS} (x_{ema} - l_{hs} \varphi_G) + d_{BS} \left(\frac{dx_{ema}}{dt} - l_{hs} \frac{d\varphi_G}{dt} \right) - F_{fr,bs} + F_L(t).$$

У щойно наведеному рівнянні $F_{fr,bs}$ – сила тертя Штрібека (1 – 2). Якщо виключити невідоме навантаження із попередніх рівнянь, то отримаємо:

$$\left[J_{Flap} F_1(x) + l_j m_{ema} \sin(\varphi_{Flap}) \right] \frac{d^2 x_{ema}}{dt^2} = -J_{Flap} F_2(x) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \sin(\varphi_{Flap}) \times$$

$$+ l_j \left[F_{BS} (x_{ema} - l_{hs} \varphi_G) + d_{BS} \left(\frac{dx_{ema}}{dt} - l_{hs} \frac{d\varphi_G}{dt} \right) + F_{fr,BS} \right] - \frac{WdL_{Flap}^2}{2} V_0^2 \sin^2 \varphi_{Flap}$$

Навантаження на штоку ЕМП $F_L(t)$ та кут повороту закрилок отримуються із наведених вище співвідношень. Модель ЕМП містить ще чотири рівняння, що описують внутрішню фізику електромеханічної природи [9]: мотор без щіток, що працює на постійному струмі, і трансмісійну кінематику, що складається із передавальної коробки і приводу у вигляді сферичного гвинта. Для опису динаміки двигуна струм і напруга перетворюються із трифазної системи на пряму (*direct*) і квадратичну (*quadratic*) осі (d - q координати) за допомогою перетворення Парку [4].

Струми у моторі описуються такими диференціальними рівняннями:

$$\frac{dI_d}{dt} = \frac{1}{L_d} (U_d - RI_d + \omega_{el} L_q I_q), \quad \frac{dI_q}{dt} = \frac{1}{L_q} [U_q - RI_q - \omega_{el} (\Psi_{PM} + L_q I_q)],$$

де $I_{d,q}$, $L_{d,q}$ і $U_{d,q}$ – струм, індуктивність і напруга вздовж d або q осі відповідно; R – електричний опір двигуна, ω_{el} – кутова швидкість фізичного поля, що обертається, Ψ_{PM} – магнітний потік постійного магніту. У разі кількості пар полюсів Z_p кутова швидкість механічного двигуна є

$$\omega_{el} = Z_p \omega_{mot}$$

Момент, що створюється електричним струмом, дорівнює

$$M_{el} = \frac{3Z_p}{2} [(L_d - L_q) \cdot I_d \cdot I_q + \Psi_{PM} \cdot I_q].$$

У такому разі, рівняння для положення φ_M мотору (двигуна) є [9]

$$J_{mot} \frac{d^2 \varphi_{mot}}{dt^2} = M_{el} - M_{fr,mot} - M_{L,mot},$$

де J_{mot} – момент інерції мотору, $M_{L,mot}$ – зовнішнє навантаження, що діє на вал мотору, і $M_{fr,mot}$ – момент сили тертя, який залежить від швидкості (тертя Штрібека).

Всі частини редукційної передачі, що обертаються, з'єднання валу з мотором і сферичним гвинтом представлені наступними рівняннями обертального руху [9]

$$J_{tot} \frac{d^2 \varphi_G}{dt^2} = -M_{L,mot} - M_{fr,rot} + M_L,$$

$$M_{L,rot} = C_{rot} (\varphi_G - \varphi_{mot}) + d_{rot} \left(\frac{d\varphi_G}{dt} - \frac{d\varphi_{mot}}{dt} \right),$$

де J_{rot} , C_{rot} , d_{rot} – момент інерції, жорсткість і демпфування валу мотора і передач, які приведені до однієї маси. позначено Штрібеківське тертя, до якої входять тертя спокою, кулонівське тертя та в'язке тертя. M_L – навантаження, що діє на частини, що обертаються.

Поступальний рух сферичного гвинта описується подібно до частин, що обертаються [9]

$$m_{ema} \frac{d^2 x_{ema}}{dt^2} = -F_G - F_{fr,bs} + F_{ema},$$

$$F_G = C_{bs} (x_{ema} - x_G) + d_{bs} \left(\frac{dx_{ema}}{dt} - \frac{dx_G}{dt} \right),$$

де F_G – навантаження (сила) між гайкою та сферичним гвинтом,

C_{bs} і d_{bs} – коефіцієнти жорсткості та демпфування гвинтового механізму,

$F_{fr,bs}$ – сила тертя між валом гвинта та гайкою відповідно.

У трансмісійну модель також включено залежний від напрямку ккд η_{ema} , який представляє ефективність коробки передач та сферичного гвинта. Нарешті, перехід між обертальним та поступальним рухами пов'язаний співвідношеннями [9]

$$F_G = M_L \cdot i_{ema} \cdot \eta_{ema}, \quad \varphi'_G = x_G \cdot i_{ema} \cdot \eta_{ema}.$$

Вважається, що ЕМП контролюється швидкістю за допомогою контролеру каскадного типу з контрольним контуром вхідного струму та контуром контролю вихідної швидкості, обидва реалізовані за допомогою PI -контролерів. Вихідне значення на контролері швидкості обмежено максимальним квадратичним струмом мотору. Вихідне значення на контролері струму обмежено максимальним квадратичним вольтажем (напругою).

Безрозмірні рівняння: робоча модель та результати обчислень

Перейдемо від розмірних до безрозмірних рівнянь. Почнемо із рівняння для кута повороту закрилок. Введемо такі масштаби:

$[\varphi_F] = \varphi_{F_{max}}$ – максимальний кут повороту закрилок,

$[F_L] = F_{L_{max}}$ – максимальне зусилля на штоку електромеханічного приводу,

$[t] = T_0$ – масштаб часу опускання – підйому закрилок. « \leftarrow » позначатимемо безрозмірні величини. Згідно із наведеними даними, отримуємо:

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_F}{dt^2} = A(t) \sin^2 \bar{\varphi}_F + B(t) \sin \bar{\varphi}_F,$$

$$A(t) = \frac{1}{J_F} \frac{W_d L_F^2}{4} \rho(t) V_a^2(t) [T_0^2], \quad B(t) = -\frac{F_L(t) l_i}{J_F} [T_0^2]. \quad (5)$$

Як видно із співвідношень (5), зміна у часі кута повороту закрилок залежить від навантаження на штоку $B(t)$, швидкості літака разом із висотою, на якій він летить – $A(t)$.

Наступним є безрозмірне рівняння для переміщення штока ЕМП у вигляді, зручному для математичного аналізу:

$$\frac{d^2 \bar{x}_{ema}}{d\bar{t}^2} = \frac{A_1}{A_0} \left(\frac{d\bar{x}_{ema}}{d\bar{t}} \right)^2 + \frac{A_2}{A_0} \frac{d\bar{x}_{ema}}{d\bar{t}} + \frac{A_3}{A_0} \bar{x}_{ema} + \frac{A_4}{A_0} \frac{d\bar{\varphi}_G}{d\bar{t}} + \frac{A_5}{A_0} \bar{\varphi}_G + \frac{A_6}{A_0} \bar{F}_{fr,bs} + \frac{A_7}{A_0} \sin^2 \varphi_{Flap}.$$

У наведеному рівнянні масштаб змінної t залишається тим самим, а решта масштабів виглядають так:

$$[x_{ema}] = x_{\max}, \quad [\varphi_G] = \varphi_{G \max}, \quad [f_{fr,bs}] = f_{fr, \max}.$$

При цьому використані такі позначення:

$$\begin{aligned} A_0 &= -J_{Flap} F_1(x) + l_j m_{ema} \sin \varphi_{Flap}, & A_1 &= -J_{Flap} F_2(x_{ema}), \\ A_2 &= l_j d_{BS} \sin(\varphi_{Flap}), & A_3 &= l_j F_{BS} \sin(\varphi_{Flap}), \\ A_4 &= -d_{BS} l_{hs} l_j \sin(\varphi_{Flap}), & A_5 &= -l_j l_{hs} \sin(\varphi_{Flap}), \\ A_6 &= -l_j \sin(\varphi_{Flap}), & A_7 &= -\frac{W_2}{2} l_{Flap}^2 V_0^2 \sin^2(\varphi_{Flap}). \end{aligned}$$

Далі, обезрозмірюємо рівняння для прямого та квадратичного струмів

$$\frac{d\bar{I}_d}{d\bar{t}} = E_1 + E_2 \bar{I}_d + E_3 \frac{d\bar{\varphi}_{mot}}{d\bar{t}} \bar{I}_q, \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{I}_q}{d\bar{t}} = F_1 + F_2 \bar{I}_q + F_3 \frac{d\bar{\varphi}_{mot}}{d\bar{t}} + F_4 \bar{I}_d \frac{d\bar{\varphi}_{mot}}{d\bar{t}}. \quad (7)$$

Безрозмірні параметри у (6), (7) визначаються такими співвідношеннями

$$E_1 = \frac{U_d}{L_d} \frac{T_0}{I_{d \max}}, \quad E_2 = \frac{R}{L_d} T_0, \quad E_3 = \varphi_{mot \max} \frac{L_q}{L_d} \frac{I_{q \max}}{I_{d \max}};$$

$$F_1 = \frac{U_q}{L_q} \frac{T_0}{I_{q \max}}, \quad F_2 = \frac{R}{L_q} \frac{T_0}{I_{q \max}},$$

$$F_3 = \frac{\Psi_{PM}}{L_q} \frac{1}{I_{q \max}}, \quad F_4 = \frac{L_d}{L_q} \frac{I_{d \max}}{I_{\max}} \varphi_{mot \max}.$$

Залишилося перетворити ще два рівняння – для кутів повороту електродвигателя та передачі [9]. Вони мають відповідно вигляд:

$$\frac{d^2\bar{\varphi}_{mot}}{dt^2} = G_1\bar{I}_d\bar{I}_q + G_2\bar{I}_q + G_3\bar{M}_{fr,mot} + G_4\bar{M}_{L,mot},$$

$$\frac{d^2\bar{\varphi}_G}{dt^2} = H_1(\bar{\varphi}_G - \bar{\varphi}_{mot}) + H_2\left(\frac{d\bar{\varphi}_G}{dt} - \frac{d\bar{\varphi}_{mot}}{dt}\right) + H_3\bar{M}_{fr,mot} + H_4\bar{M}_L,$$

безрозмірні параметри, в яких визначаються такими співвідношеннями

$$G_1 = \frac{3}{2} Z_p \frac{(L_d - L_q) I_{d\max} I_{q\max} T_0^2}{J_{mot} \varphi_{mot\max}}, \quad G_2 = \frac{3}{2} Z_p \frac{\Psi_{PM} I_{q\max} T_0^2}{J_{mot} \varphi_{mot\max}},$$

$$G_3 = \frac{M_{fr\max} T_0^2}{J_{mot} \varphi_{mot\max}}, \quad G_4 = \frac{M_{L\max} T_0^2}{J_{mot} \varphi_{mot\max}}.$$

$$H_1 = -\frac{C_{rot} T_0^2}{J_{tot} \varphi_{G\max}}, \quad H_2 = -\frac{d_{rot} T_0^2}{J_{tot} \varphi_{G\max}},$$

$$H_3 = \frac{M_{fr,rot\max} T_0^2}{J_{tot} \varphi_{G\max}}, \quad H_4 = \frac{M_{L\max} T_0^2}{J_{tot} \varphi_{G\max}}.$$

На рис. 2 наведені типові залежності у часі зміни довжини ходу штоку ЕМП *a*) та кута повороту закрилку *б*). Порівняння графіків свідчить про нелінійну залежність $\varphi = \varphi(x(t))$. Крім того, якщо порівняти закон руху $x(t)$ із наявними результатами з інших джерел (див. роботи), то стане очевидно: по-перше. Якісний характер кривої на рис. 2, *a*) співпадає із існуючими і, по-друге, графік цієї кривої має більш плавний вигляд, ніж ті, на які щойно посилялося.

Висновки

У роботі вдосконалено математичну модель, що описує систему «ЕМП – закрилло». Показана необхідність врахуванням нелінійності під час опису кінематики руху системи «шток ЕМП – закрилло». Закони руху штока ЕМП та закрилло є різними математичними функціями. У представленій у роботі В математичну моделі додане рівняння для сили навантаження на штоку ЕМП, що дає можливість автоматично стежити та визначати у кожний момент часу навантаження на штоку ЕМП, яке необхідно створювати для керування закрилками.

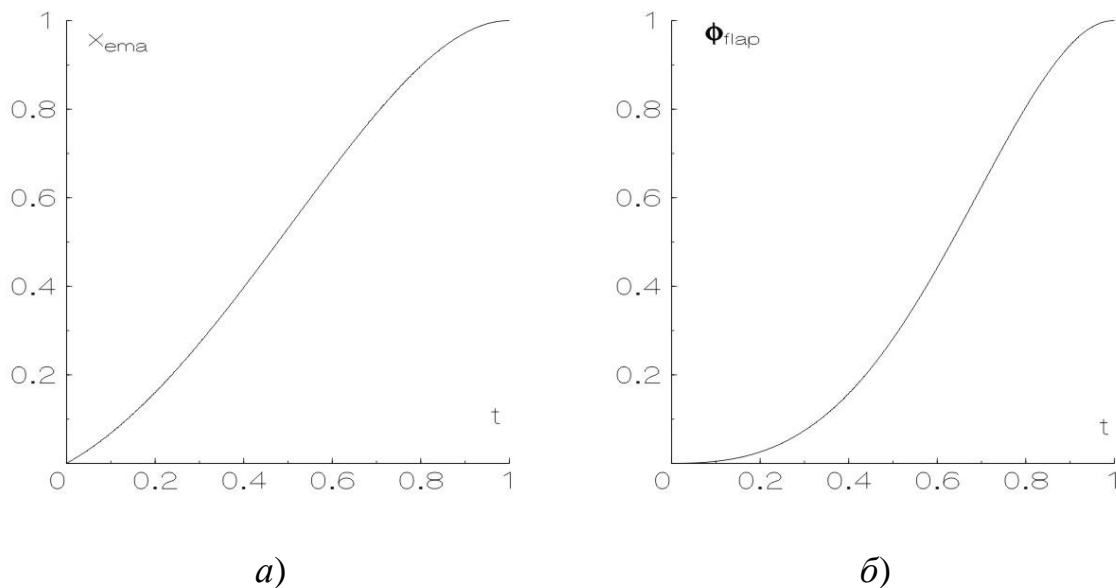


Рис. 2. Моделі тимчасові залежності: а) – ходу штока електромеханічного приводу; б) – кута повороту закрилок

Список використаної літератури

1. Ломакин В. Математическое моделирование электрогидравлического следящего привода высокоточного регулирования вращательного движения. / В. Ломакин, И. Шумилов, Т. Щербаков. //Изв. выс. учеб. зав., №10. – 2011. – с. 38-45.
2. Shang Y. Study of Friction Torque Loading with an Electro-hydraulic Load Simulator. / Y. Shang, Z. Jiao, X. Wang, S. Zhao // Chinese Journal of Aeronautics, No. 6. – 2009. – pp. 691—699.
3. Пionткєві О. Підвищення ефективності багаторежимного гідроприводу фронтального навантажувача // К. НТТУ «КПІ» – 2019. – 249 с.
4. Olsson O. Friction Models and Friction Compensation / O. Olsson, K. Astrom, de Wit C. Canudas, M. Gafvert, P. Lischinsky. // European Journal of Control, Volume 4, Issue 3. – 1998. – pp. 176–195.
5. Qiao G. A review of electromechanical actuators for More/All Electric aircraft systems. / G. Qiao, G. Liu, Shi Zhenghong, Y. Wang, S. Ma, T. Lim. // Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 232 (22). – 2018. – pp. 4128-4154.
6. Hersy M. The laws of lubrication of horizontal bearings. / M. Hersy // Journal of Washington Academy of Sciences. Vol. 4 No. 19. – 1914. – pp. 542 – 552.
7. He T. Experimental and Numerical Investigations of the Stribeck Curves for Lubricated Counterformal Contacts. / T. He, D. Zhu, J. Wang, Q. Wang. // Journal of Tribology. Vol. 139. – 2017. – pp. 021505-1—021505-13.

8. *Iurian, C., Ikhouane, F., Rodellar, J., Grino, R.* Identification of system with dry friction. Universitat Politecnica De Catalunya. Institute d'Organitzacio I Control de Sistemas Industrials. (46 pages report).
9. *Cochoy O.* Concepts for position and load control for hybrid actuation in primary flight controls. / O. Cochoy, S. Hanke, U. Carl. // *Aerospace Science and Technology*, No. 11. – 2007.—pp. 194-201.
10. *Chakraborty I., Jackson D., Trawick D.* Development of a Sizing and Analysis Tool for Electrohydrostatic and Electromechanical Actuators for the More Electric Aircraft // *Aviation Technology, Integration, and Operation Conference*. Los Angeles, CA. AIAA 4282. August 13-14, 2013.
11. *Budinger M.* Estimation models for the preliminary design of electromechanical actuators. / M. Budinger, J. Liscouet, F. Hospital, and J. Mare. // *Proc. IMechE Vol. 236 Part G: J. Aerospace Engineering*. – 2012. – pp. 243—259.
12. *Arriola, D., Thielecke, F.* // Design of Fault-Tolerant Control Functions for a Primary Flight Control System with Electromechanical Actuators. IEEE AUTOTESTCON conference. – 2015 –. DOI: [10.1109/AUTEST.2015.7356523](https://doi.org/10.1109/AUTEST.2015.7356523).
13. *Доценко В.* О создании адекватной динамической модели системы управления предкрылками и закрылками. / В. Доценко, Ю. Ковеза, И. Лихошерст. // *Авиационно-космическая техника и технология*, № 3 (120). – 2015. – с. 10–15.
14. *Доценко В.* Упрощенная модель системы управления закрылками и предкрылками. / В. Доценко, Ю. Ковеза, И. Лихошерст. // *Авиационно-космическая техника и технология*. № 4(121). – 2015. – с. 5–9.
15. *Linyan S., Ali Y., Ashraf M., Mumtaz M., Baig W.* (2017). Fixed structured H_{∞} Controller Design for Aircraft Control Surface driven by Power Wire Hydraulic Actuator // *Proceedings of 14th International Bhurban Conference on Applied Sciences & Technology (IBCAST)*. Islamabad, Pakistan, 10-14 January, 2017. pp. 259–264.
16. *Ali H.* (2023). Analytical position control system of a linear hydraulic actuator used in aircraft applications. / H. Ali, F. Al-Bakri, S. Khafaji. // *International Journal of Mechatronics and Applied Mechanics*, Issue 13. – 2023. – pp. 209–218.

М. М. Чепілко⁶, д.ф.-м.н., професор, С. О. Пономаренко⁷, к.т.н., доцент

КІЛЬКІСНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ЧУТЛИВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ФЕРОМАГНІТНОГО ГІРОСКОПА

Ua

У статті розглянуті фізичні основи застосування сучасних нанотехнологій для розробки нанорозмірного феромагнітного гіроскопа для систем керування малогабаритними рухомими об'єктами. Запропонована модель феромагнітного гіроскопа базується на використанні періодичної структури (псевдокристал) із когерентних монодомених феромагнітних квантових точок, які перебувають у стані квантової левітації. Особливістю запропонованої моделі феромагнітного гіроскопа є відсутність будь-яких механічних компонентів, що дозволить забезпечити високу надійність і чутливість приладу. Встановлена залежність амплітудно-частотної характеристики інтенсивності поглинання енергії гармонійного магнітного поля псевдокристалом від його орієнтації у просторі, що може бути покладена в основу розробки феромагнітного гіроскопа.

En

The article deals with the physical foundations of the application of modern nanotechnologies for the development of a nano-sized ferromagnetic gyroscope for control systems of small moving objects. The proposed model of a ferromagnetic gyroscope is based on the use of a periodic structure (pseudocrystal) of coherent monodomain ferromagnetic quantum dots (FCDs) that are in a state of quantum levitation. A feature of the proposed ferromagnetic gyroscope model is the absence of any mechanical components, which will ensure high reliability and sensitivity of the device. The dependence of the amplitude-frequency characteristic of the intensity of energy absorption of a harmonic magnetic field by a pseudocrystal on its orientation in space has been established, which can be used as a basis for the development of a ferromagnetic gyroscope.

Вступ

Ідеї застосування сучасних нанотехнологій у розробці нанорозмірних та енергоефективних чутливих вимірювачів є предметом теоретичних і практичних досліджень [1, 2, 4, 5]. Практичний інтерес викликає створення феромагнітного гіроскопа для систем керування малогабаритними рухомими об'єктами.

У роботі [1] запропонована модель феромагнітного гіроскопа із нанорозмірними чутливими елементами. У якості такого чутливого елемента пропонується використати періодичну структуру (псевдокристал) із когерентних монодомених феромагнітних квантових точок (ФКТ), що локалі-

⁶ КПІ ім. Ігоря Сікорського

⁷ КПІ ім. Ігоря Сікорського

зовані у сферичних наноконтейнерах, де вони перебувають у стані квантової левітації. Для розроблення моделі феромагнітного гіроскопа у [1] вибиралися N сферично–симетричних наноконтейнерів в околі центру яких у стані квантової левітації знаходяться феромагнітні квантові точки, тобто сферично–симетричні об'єкти створені із феромагнітного матеріалу із характеристичним розміром $d \leq 10$ нм. Така конструкція перетворює ФКТ у суперпарамагнітний об'єкт [2 – 6], який внаслідок ефекту Ейнштейна – де Гааза [7 – 9] буде мати момент імпульсу, що зберігається у часі.

У роботах [10, 11] висловлювалися пропозиції використати класичний ефект Ейнштейна - де Гааза [1, 3] для побудови феромагнітних гіроскопів. Однак у випадку масивних кристалів ці ефекти мають низькі кількісні показники, що непридатні для практичного застосування, а мають лише академічний інтерес. Водночас, у разі наноб'єктів, що мають квантові властивості, ситуація може бути якісно іншою.

Із таких нанорозмірних елементарних структур створюється шарувата періодична структура з кубічною симетрією (феромагнітний псевдокристал з кубічною симетрією). У такій структурі ФКТ рівновіддалені одна від одної на відстань a , яка дорівнює діаметру сферично–симетричного контейнера, де знаходиться ФКТ (рис. 1, рис. 2, рис. 3).

У разі технологічної реалізації псевдокристалу отримаємо матрицю для ФКТ, в якій вони будуть віддалені одна від одної на відстань достатню щоб вважати, що між ФКТ має місце лише магнітна диполь–дипольна взаємодія. За цих умов знімається питання впливу симетрії псевдокристалу на його макроскопічні магнітні властивості, тобто мова про кубічну симетрію псевдокристалу ведеться лише для конкретизації моделі.

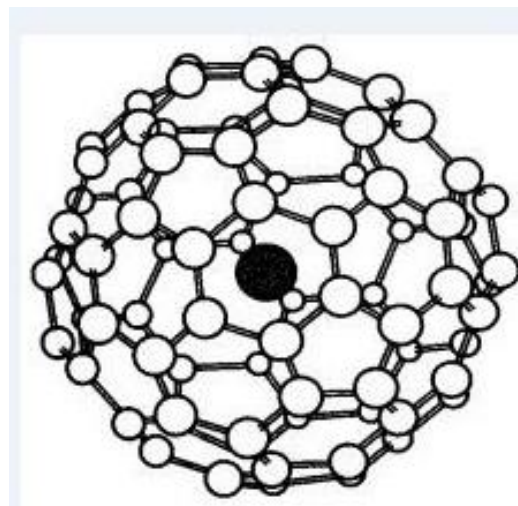
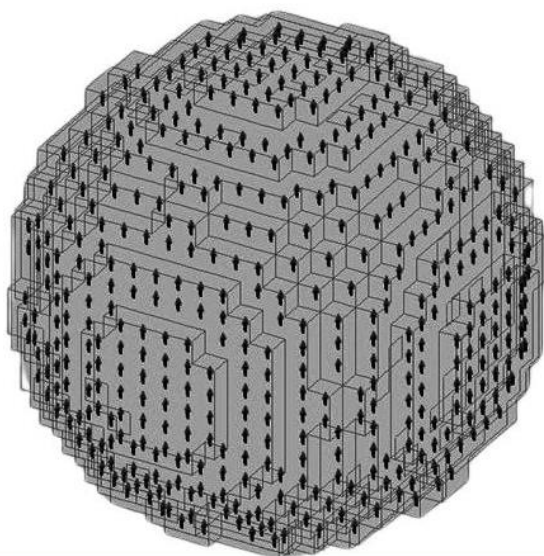


Рис. 1. Модель феромагнітної квантової точки
Рис. 2. Феромагнітна квантова точка інкапсульована у наноконтейнер

Як показують теоретичні та експериментальні дослідження [2 – 6], у феромагнітних кристалах магнітний момент його атомів, у наслідок спіно-орбітальної взаємодії та магнітної анізотропії, буде істотно меншим, ніж сума нескомпенсованих магнетонів Бора (спінових магнітних моментів електронів) цих же атомів. У той же час у нанорозмірного феромагнетика з характеристичним розміром $1 \text{ нм} \leq d \leq 12 \text{ нм}$ (де може перебувати від 10 до 10^4 атомів), внаслідок перебудови міжатомної взаємодії та переважаючої ролі поверхневих атомів над об'ємними, нанорозмірний феромагнетик стає монодоменним, а його власний магнітний момент наближається за своїм значенням до векторної суми нескомпенсованих магнетонів Бора атомів, що входять до його складу, і стає істотно більшим [2 – 6] порівняно з випадком феромагнітного кристала.

Ансамблі нанорозмірних феромагнітних утворень, які мають властивість надзвичайно великого питомого намагнічування (що істотно перевищує питоме намагнічування феромагнітного кристала) у слабких зовнішніх магнітних полях без виникнення гістерезису, називають суперпарамагнетиками [2 – 6]. Їх можна розглядати як «великі блоки» для створення нових матеріалів і приладів.

Постановка задачі

У даній роботі будуть проаналізовані фізичні принципи та кількісні характеристики параметрів (визначених у роботі [1]), які впливають на функціонування феромагнітного гіроскопа з нанорозмірними чутливими елементами (рис. 1, рис. 2). При цьому чутливий елемент представляє собою тривимірну, періодичну, шарувату структуру (рис. 3) заданого об'єму V (штучний, шаруватий кристал із нанорозмірних чутливих елементів).

Також буде розглянута динаміка вектору намагніченості псевдокристалу у двохкомпонентному магнітному полі $\vec{H} = (H_{\omega}, 0, H_0)$, де \vec{H}_0 — статичне, а \vec{H}_{ω} — динамічне магнітне поле (МП). Передбачається, що основа псевдокристалу жорстко прикріплена до платформи літального апарату, вектор магнітостатичного поля \vec{H}_0 (статична компонента МП) є строго перпендикулярним до основи псевдокристалу, а вектор динамічного магнітного поля \vec{H}_{ω} (динамічна компонента МП) є перпендикулярним до бічної грані псевдокристалу (рис. 3).

За рахунок аналізу спектру поглинання динамічного МП, залежного від орієнтації псевдокристалу у просторі, існує можливість розрахувати кутові координати його нового положення, які визначаються взаємною орієнтацією фіксованого напрямку моменту імпульсу ФКТ та вектора зовнішнього статичного МП.

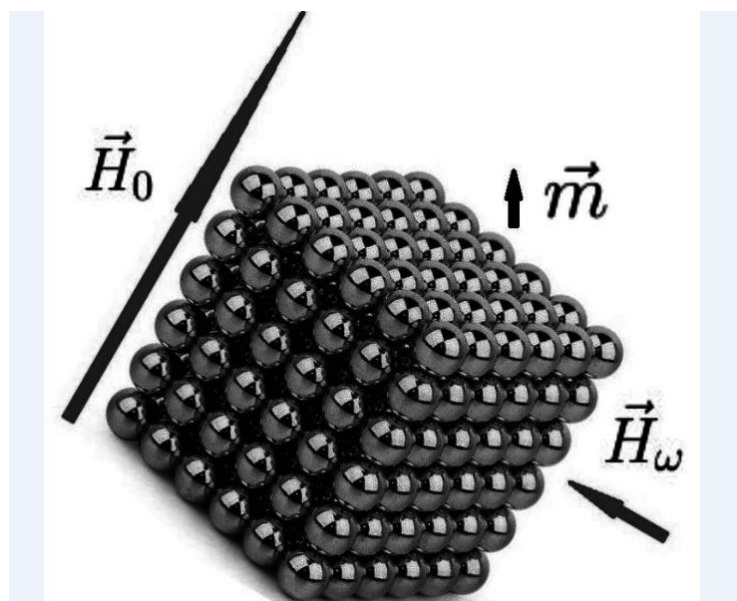


Рис. 3. Модель ферромагнітного гіроскопа. \vec{H}_0 – магнітостатичне поле, \vec{H}_ω – динамічне магнітне поле, \vec{m} – магнітний момент ФКТ, який є інтегралом руху

Необхідно, на основі аналізу спектру поглинання енергії динамічного МП, залежного від взаємної орієнтації векторів $\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{m}_i$ та \vec{H}_0 , побудувати функціональну залежність інтенсивності поглинання енергії гармонічного магнітного поля псевдокристалом від його орієнтації у просторі, яка може бути покладена в основу розробки ферромагнітного гіроскопа,

Визначення кількісних характеристик параметрів нанорозмірних чутливих елементів гіроскопа

В якості чутливого елемента ферромагнітного гіроскопа пропонується розглядати ФКТ, магнітний момент \vec{m} якої прецесує у зовнішньому магнітному полі. При цьому ФКТ перебуває у наноконтейнері у стані квантової левітації [1], а магнітний момент ФКТ \vec{m} значною мірою формується її некомпенсованою спіноюю підсистемою.

У роботі [1] показано, що ферромагнітний гіроскоп буде практично значущим за умови, що квантовий момент імпульсу ФКТ \vec{S} , $S = |\vec{S}| = N \frac{\hbar}{2}$, який зумовлений її спіноюю підсистемою, що складається із N некомпенсованих спінів, буде істотно перевищувати її класичний механічний момент імпульсу $\vec{l}_0 = \vec{J}_0 \cdot \vec{\omega}_0$. Тут $J_0 = \frac{2}{5} m_0 R^2$ — класичний момент інерції ферромагнітної кулі з інертною масою m_0 , радіусом R , що обертається з ци-

клічною частотою класичного ефекту Ейнштейна - де Гааза ω_0 . Лише за умови виконання цієї умови, із якої випливає нерівність

$$\omega \approx \frac{S}{J_0} \gg \omega_0, \quad (1)$$

намагнічена ФКТ перебуватиме у стані обертального руху з частотою ω , тобто виникатиме супер ефект Ейнштейна - де Гааза.

Згідно [1] величина магнітного моменту ФКТ визначається формулою

$$m = \mu_B N = -\gamma S, \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}, \quad \gamma = \frac{|e|}{m_e c}. \quad (2)$$

Із формули (1) знаходимо частоту обертання ФКТ, яка дорівнюватиме

$$\omega \approx \frac{S}{J_0} = \frac{5}{4} \frac{N\hbar}{m_0 R^2}, \quad N \gg 1, \quad \omega \gg \omega_0. \quad (3)$$

Встановимо наближену формулу для величини ω . Очевидно, що величини N і R взаємозалежні. Встановимо між ними функціональний зв'язок. Для цього ФКТ і її структурний елемент будемо розглядати як кулі радіусом R і r_a відповідно, а зв'язок між їх об'ємами V і V_a та інертними масами

m_0 і m_a запишемо таким чином: $V \approx NV_a/k$, $m_0 \approx Nm_a/k$, де k – кількість некомпенсованих спінів у структурного елемента ФКТ. Тоді кількість некомпенсованих спінів ФКТ N у об'ємі V та величина ω будуть мати такі представлення

$$N = k \left(\frac{R}{r_a} \right)^3, \quad \omega = \frac{5}{4} \frac{k\hbar}{m_a R^2}. \quad (4)$$

Кількісну оцінку актуальних параметрів задачі зробимо на прикладі такого структурного елемента ФКТ, як атом заліза у якого $m_a = 9,27 \cdot 10^{-23}$ г, $r_a = 1,2 \cdot 10^{-8}$ см, $k = 4$.

Питання квантової левітації ФКТ у наноконтейнері було розглянуто у роботі [1]. Показано, що в основному стані ФКТ буде знаходитися в околі центру наноконтейнера, а її енергія визначається такою формулою

$$E_{10} = \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0} \cdot 6,283 \neq 0. \quad (5)$$

ФКТ, що складається з атомів заліза, будучи розміщеною у наноконтейнері, в основному стані матиме цілком задовільними значення енергії

$$E_{10} = \hbar\omega_{10}, \quad \omega_{10} = 3 \cdot 10^4 \frac{1}{c}. \quad (6)$$

Що стосується величин N і ω , то вони матимуть такі кількісні характеристики

$$N \approx 4.72 = 288, \quad \omega \approx 1,43 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{с}}. \quad (7)$$

Істотно, що ФКТ із $R \approx 1$ нм у стані квантової левітації буде обертатися з кутовою швидкістю порядку $10^{11} \frac{1}{\text{с}}$ (рух за інерцією) тільки за рахунок наявності у неї монодоменого магнітного моменту \vec{m} , без будь-яких енергетичних витрат (суперфект Ейнштейна — де Гааза).

Для оцінки величини індукції магнітного поля ФКТ $B_{\mu B}$, зумовленого її магнітним моментом m , використаємо рівність $B_{\mu B} m \approx \hbar \omega$. Звідси, враховуючи формули (1), (2), отримаємо

$$B_{\mu B} \approx \frac{\hbar \omega}{\gamma S} = \frac{\hbar}{\gamma J_0}. \quad (8)$$

За порядком величини індукція магнітного поля ФКТ (8) буде мати таке значення

$$B_{\mu B} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ Гс}. \quad (9)$$

Формула (9) свідчить, що магнітний момент ФКТ \vec{m} створює суттєве магнітодипольне поле, яке буде потрібно враховувати у подальших розрахунках.

Таким чином ми знайшли кількісне обґрунтування для використання у перспективі ФКТ як чутливого елемента феромагнітного гіроскопа.

З точки зору прикладних застосувань псевдокристал доцільно жорстко кріпити нижньою гранню до рухомої платформи, яка знаходиться у зовнішньому однорідному магнітостатичному полі із напруженістю \vec{H}_0 . Магнітостатичне поле \vec{H}_0 доцільно вибрати перпендикулярним до рухомої платформи на якій розташовано цей псевдокристал.

З огляду на закон збереження сумарного моменту імпульсу ФКТ $\vec{J} = \text{const}$, зміна орієнтації рухомої платформи у просторі буде призводити до зміни напрямку вектора повної індукції магнітного поля \vec{B}_{res} , який формується як векторна сума магнітостатичного поля \vec{H}_0 та магнітодипольного поля псевдокристалу \vec{B} зумовленого магнітними моментами \vec{m} ФКТ (див. далі). Контроль за індукцією магнітного поля \vec{B}_{res} , у свою чергу, дозволить отримати дані про орієнтаційну динаміку літального апарату.

Магнітна сприйнятливність псевдокристалу

Введемо декартову систему координат $OXY Z$, центр якої O буде знаходитися у геометричному центрі псевдокристалу, а осі X, Y, Z паралельні його бічним ребрам. Орти цієї системи координат позначимо таким чином: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

Будемо вважати, що вздовж осей X, Y, Z знаходиться по $2N_{1,2,3} + 1$ ФКТ. Тут і далі $N_{1,2,3}$ — цілі числа. Загальна кількість ФКТ у псевдокристалі буде рівною $N = (2N_1 + 1) \times (2N_2 + 1) \times (2N_3 + 1)$. Координати кожної ФКТ будуть визначатися радіус-вектором $\vec{r}_{\vec{n}} = a\vec{n}$, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, де $n_{1,2,3} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N_{1,2,3}$.

З огляду на властивості ФКТ [2 – 6] та їх значну взаємовіддаленість допустимо вважати, що між ними існує лише магнітодипольна взаємодія.

Згідно [1] зв'язок між індукцією магнітодипольного поля $\vec{B}_{\vec{n}} = \vec{B}_{\vec{n}}(\vec{r})$ та намагніченістю псевдокристалу

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{n}} \vec{m}, \text{ або } \vec{M} = \frac{\vec{m}}{a^3} \quad (10)$$

визначається формулою

$$\vec{B}_d = -\hat{G}(\vec{r})\vec{M}, \quad \hat{G} = a^3 \sum_{\vec{n}} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{n}|^3} - 3 \frac{\hat{D}(\vec{r} - \vec{n})}{|\vec{r} - \vec{n}|^5} \right), \quad (11)$$

де \hat{G} – геометричний фактор (дискретний розмагнічуючий фактор) псевдокристалу, $\hat{D}(\vec{r} - \vec{n})$ – діада, а $V = a^3 N$ – об'єм псевдокристалу.

Згідно принципу суперпозиції індукція магнітного поля створеного псевдокристалом у магнітостатичному полі $H \sim 0$ буде визначатися формулою

$$\vec{B}_{res} = \vec{H}_0 + \vec{B}_d. \quad (12)$$

Оскільки магнітні моменти кожної ФКТ пропорційні їх моментам імпульсу, що зберігаються, то і магнітні моменти ФКТ також будуть зберігати свій напрямок у просторі при зміні орієнтації псевдокристалу. Це означає, що у силу збереження моментів імпульсу ФКТ, орієнтація вектора \vec{B}_d у просторі буде незмінною. У той же час при зміні орієнтації псевдокристалу вектор $\vec{B}_{res} = \vec{H}_0 + \vec{B}_d$ буде змінюватися.

У разі $\vec{H} \neq 0$ магнітні моменти ФКТ \vec{m} у псевдокристалі будуть перебувати у стані прецесії. Якщо між двома бічними гранями псевдокристалу створити однорідне гармонійне магнітне поле (ГМП) \vec{H}_ω із циклічною частотою ω_z , перпендикулярне до магнітостатичного поля \vec{H}_0 , то в околі ларморівських частот магнітних моментів ФКТ \vec{m} виникне інтенсивне по-

глинання його енергії. Це явище можна використати для визначення зміни орієнтації псевдокристалу у просторі.

За умови $N_{1,2,3} \gg 1$ можна вважати, що основну роль у поглинанні енергії ГМП \vec{H}_ω грають ФКТ в об'ємі псевдокристалу. Тому будемо вважати повну індукцію магнітного поля

$$\vec{B}_f = \vec{B}_d + \vec{H}_0 + \vec{H}_\omega \quad (13)$$

у межах псевдокристалу однорідною, а за своїм значенням близькою до такої у центрі псевдокристалу.

Якщо вибрати розміри псевдокристалу такими, що $1 \ll N_3 \ll N_{1,2}$ то, згідно [12 – 14], геометричний фактор (дискретний розмагнічуючий фактор) та магнітодипольне поле будуть мати лише по одній відмінній від нуля компоненті

$$G_{z'z'} = 4\pi, \quad \vec{B}'_d = (0, 0, -4\pi M_{z'}). \quad (14)$$

У цьому наближенні нелінійне динамічне рівняння Ландау – Ліфшиця для намагніченості псевдокристалу (10) в системі координат $Ox'Oy'Oz'$ матиме вигляд

$$\frac{d\vec{M}'}{dt} = -\gamma [\vec{B}'_f \times \vec{M}'] - \frac{\beta}{M_0^2} [[\vec{B}'_f \times \vec{M}'] \times \vec{M}'], \quad (15)$$

γ – гіромагнітне відношення, $0 < \beta \ll 1$ – коефіцієнт затухання, $M_0 = |\vec{M}'|$.

Якщо рівняння (15) скалярно помножити на вектор \vec{M}' і врахувати властивості змішаного векторного добутку у правій частині рівняння (15), до дійдемо до висновку, що $|\vec{M}'| = \text{const}$. Це означає, що динаміка вектора \vec{M}' у магнітному полі з індукцією \vec{B}'_f зводиться до прецесії.

Конкретизуємо напруженість зовнішнього магнітного поля \vec{H}'_f таким чином

$$\begin{cases} \vec{H}'_f = (H_{\omega x'}, H_{\omega y'}, H_{0z'} + H_{\omega z'}), \\ \vec{H}'_\omega = \vec{H}'_1 e^{i\omega z't}, \end{cases} \quad (16)$$

де $\omega_{z'}$ – циклічна частота гармонічного магнітного поля. У цьому випадку індукція магнітного поля в (15) матиме таке представлення

$$\vec{B}'_f = \vec{B}'_d + \vec{H}'_f. \quad (17)$$

З математичної точки зору рівняння (15) подібне до таких, що аналізувалися у теорії магнітного резонансу [12 – 14] зазвичай при малих кутах відхилення між векторами \vec{M}' і \vec{B}'_f . У даному випадку таке обмеження не прийнятне.

Для розбудови загального розв'язку рівняння (15) в якості пробної функції виберемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} M'_{0x'} = M_0 \sin(\theta) \cos(\varphi); \\ M'_{0y'} = M_0 \sin(\theta) \sin(\varphi); \\ M'_{0z'} = M_0 \cos(\theta), \end{cases} \quad (18)$$

де $M_0 = |\vec{M}'|$. Тут і далі $\theta = \theta(t)$ – полярний і $\varphi = \varphi(t)$ – азимутальний кути, які є динамічними змінними задачі при умові, що $|\vec{M}'| = M_0 = \text{const}$.

Між компонентами вектора \vec{M}' і кутовими динамічними змінними θ, φ має місце такий зв'язок

$$\theta = \arccos\left(\frac{M'_{0z'}}{M_0}\right), \quad \varphi = \arctg\left(\frac{M'_{0y'}}{M'_{0x'}}\right). \quad (19)$$

Для подальших викладок зручно виразити індукцію магнітного поля \vec{B}'_f через потенціальну енергію U намагніченості \vec{M}' у цьому полі.

Зв'язок між компонентами магнітного поля у декартовій і сферичній системах координат знайдено у такому вигляді

$$\begin{cases} B_{f x'} = -\frac{\partial U}{\partial M_{f x'}} = -\sin(\varphi) B_{f \varphi}; \\ B_{f y'} = -\frac{\partial U}{\partial M_{f y'}} = +\cos(\varphi) B_{f \varphi}; \\ B_{f z'} = -\frac{\partial U}{\partial M_{f z'}} = -\frac{1}{\sin(\theta)} B_{f \theta}, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} B_{f \theta} = -\frac{1}{M_0} \frac{\partial U}{\partial \theta}; \\ B_{f \varphi} = -\frac{1}{M_0 \sin(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (21)$$

компоненти магнітного поля \vec{B}'_f у сферичній системі координат, які були знайдені за рахунок формул (19). Підстановка (20) у (15) після алгебраїчних перетворень спрощує їх і надає такий вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma B_{f \varphi} = \frac{\beta}{M_0} B_{f \theta}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\gamma}{\sin(\theta)} B_{f \theta} = \frac{\beta}{M_0 \sin(\theta)} B_{f \varphi}. \end{cases} \quad (22)$$

Система рівнянь (22) еквівалентна рівнянням Ландау – Ліфшиця (15) і має широку область застосування. Її можна використовувати при довільній амплітуді коливань вектора \vec{M}' , у тому числі при будь-якому рівні нелінійності. Далі будемо вважати, що ГМП \vec{B}_ω є малим збуренням магнітостатичного поля \vec{H}_0 і використаємо критерій $|\vec{H}_1| \ll |\vec{H}_0|$, для лінеаризації системи рівнянь (22) в околі стаціонарного стану системи. З цією метою запишемо потенціальну енергію намагніченості таким чином

$$U = U_0 + U_1 \quad (23)$$

де перший доданок

$$U_0 = -H_0 M_0 \cos(\theta) + 2\pi M_0^2 \cos^2(\theta) \quad (24)$$

визначає потенціальну енергію намагніченості \vec{M}' у магнітостатичному полі, а другий

$$U_1 = -H_\omega M_0 (\sin(\theta) \cdot \sin(\theta_1) \cos(\varphi - \varphi_1) + \cos(\theta) \cdot \cos(\theta_1)) \quad (25)$$

$$H_\omega = H_1 \exp(i\omega_z t)$$

у ГМП \vec{H}'_ω , де $\theta_1 = \text{const}$, $\varphi_1 = \text{const}$ – кутові координати вектора \vec{H}'_1 .

Цілковито зрозуміло, що фізичний зміст мають лише дійсні частини величини U_1 та формул отриманих на її основі.

Підстановка (23) – (25) у (21) конкретизує магнітне поле (21) у такому вигляді

$$\begin{cases} B_{f\theta} = -H_0 \left(1 - 4\pi \frac{M_0}{H_0} \cos(\theta) \right) \sin(\theta) + \\ \quad + H_\omega (\cos(\theta) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\varphi - \varphi_1) - \sin(\theta) \cdot \cos(\theta_1)); \\ B_{f\varphi} = -H_\omega \sin(\theta) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\varphi - \varphi_1); \\ H_\omega = |\vec{H}'_1| \exp(i\omega_z t). \end{cases} \quad (26)$$

Комбінація формул (22) і (26) надає динамічним рівнянням задачі такий вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -(\alpha \omega_\theta - (\alpha \varphi + \alpha a_\theta) \omega_1 e^{i\omega_z t}) \cdot \sin(\theta); \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega_\theta + (\alpha \varphi + \alpha a_\theta) \omega_1 e^{i\omega_z t}, \end{cases} \quad (27)$$

$$\omega_\theta = \omega_0 (1 - \lambda \cos(\theta)), \quad \omega_0 = \lambda H_0, \quad \lambda = 4\pi \frac{M_0}{H_0}, \quad (28)$$

$$a_\theta = \text{ctg}(\theta) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\varphi - \varphi_1) - \cos(\theta_1),$$

$$a_\varphi = \sin(\theta_1) \cdot \sin(\varphi - \varphi_1),$$

$$\alpha = \frac{\beta}{\gamma M_0}; \quad \omega_1 = \gamma H_1.$$

Рівняння (27) точні.

У найпростішому випадку, тобто без врахування розмагнічуючого поля та процесів дисипації $\beta = 0$, розв'язки рівнянь (22) будуть мати такий вигляд

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 = \text{const}, \\ \varphi &= \varphi_0 = \phi_0 - \omega_0 t, \quad \phi_0 = \text{const}, \end{aligned} \quad (29)$$

тобто динаміка вектора \vec{M}' зводиться до прецесії навколо вектора \vec{H}'_0 з циклічною частотою $\omega_0 = \gamma \vec{H}'_0$, як і повинно бути.

Якщо врахувати розмагнічуюче поле за $\beta = 0$, то розв'язки рівнянь (22)

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 = \text{const}; \\ \varphi = \varphi_0 = \phi_0 - \omega_0 t, \quad \phi_0 = \text{const}; \\ \omega_{\theta 0} = \omega_0 (1 - \lambda \cos(\theta_0)) \end{cases} \quad (30)$$

набудуть нову якість, а саме частота прецесії $\omega_0 \rightarrow \omega_{\theta 0}$ стає залежною від кута θ_0 між напрямками векторів \vec{H}'_0 і \vec{M}'_0 .

Далі розглянемо вплив ГМП \vec{H}'_0 (рис. 3) на динаміку вектора намагнічення псевдокристалу \vec{M}' . Оскільки ця задача є суттєво нелінійною, то точний розв'язок системи рівнянь (22) знайти не має можливості. Тому обмежимося їх розв'язком у лінійному наближенні.

Зазвичай у теорії феромагнітного резонансу у разі лінеаризації рівняння Ландау - Ліфшиця використовують метод Сміта - Сулі [15, 16]. Під час його застосування у якості опорного розв'язку для динамічних рівнянь задачі використовують умову рівноваги намагніченості, коли ефективне магнітне поле (21) дорівнює нулю. Але у даній роботі, внаслідок ефекту Енштейна - де Гази, такий стан намагніченості неможливий. Намагніченість у даному випадку завжди буде перебувати у стані прецесії. Тому тут у якості опорного розв'язку під час лінеаризації системи рівнянь (22) буде потрібно вибирати їх стаціонарні розв'язки (30).

З огляду на характер збурень системи гармонічним магнітним полем \vec{H}'_0 динамічні змінні задачі виберемо у такому вигляді

$$\theta = \theta_0 + \delta\theta, \quad \varphi = \varphi_0 + \delta\varphi, \quad \delta\theta \ll 1, \quad \delta\varphi \ll 1, \quad (31)$$

де величини $\theta_0 = \text{const}$, $\varphi = \varphi_0 = \phi_0 - \omega_0 t$, відповідають стаціонарному стану системи, який визначається розв'язками (30) системи рівнянь (22) без вра-

хування процесів дисипації ($\beta = 0$). Далі ми їх врахуємо [12 – 14] стандартною редуцією частоти $\omega_{\theta 0} \rightarrow \omega_{\theta 0} + i\alpha_{\omega z'}$. Використавши представлення (31) для динамічних змінних задачі у (26) та (22) знайдемо систему неоднорідних лінійних рівнянь для величин $\delta\theta$, $\delta\varphi$ у такому вигляді

$$\begin{cases} \frac{d\delta\theta}{dt} = \omega_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\chi_1) e^{i\omega_{z'} t}; \\ \frac{d\delta\varphi}{dt} = \omega_1 \cdot (\text{ctg}(\theta_0) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\chi_1) - \cos(\theta_1)) \cdot e^{i\omega_{z'} t}, \end{cases} \quad (32)$$

де $\omega_1 = \gamma H_1$, $\chi_1 = \varphi_0 - \varphi_1$, $\varphi = \phi_0 + \omega_{\theta 0}$.

Розв'язки системи рівнянь (32)

$$\begin{cases} \delta\theta = \frac{\omega_1 \omega_{cs}(\chi_1)}{\omega_{\theta 0}^2 - \omega_{z'}^2} \cdot \sin(\theta_1) e^{i\omega_{z'} t}; \\ \delta\varphi = - \left(\frac{\omega_1 \omega_{sn}(\chi_1)}{\omega_{\theta 0}^2 - \omega_{z'}^2} \cdot \text{ctg}(\theta_0) \cdot \sin(\theta_1) + \frac{\omega_1}{i\omega_{z'}} \cos(\theta_1) \right) \cdot e^{i\omega_{z'} t}, \end{cases} \quad (33)$$

де

$$\begin{aligned} \omega_{cs} &= \omega_{\theta 0} \cdot \cos(\chi_1) + i\omega_{z'} \sin(\chi_1), \\ \omega_{sn} &= \omega_{\theta 0} \cdot \sin(\chi_1) + i\omega_{z'} \cos(\chi_1) \end{aligned} \quad (34)$$

мають чітко виражений резонанс в околі частоти $\omega_{\theta 0} = \omega_0 \cdot (1 - \lambda \cdot \cos(\theta_0))$, яка залежить від параметра θ_0 . Окрім того амплітуди коливань величин $\delta\theta$ і $\delta\varphi$ будуть функціями часу, оскільки величина χ_1 у (34) є періодичною функцією часу, що суттєво впливає на динаміку вектора \vec{M}' . Звернемо також увагу на те, що у випадку колінеарності векторів \vec{H}'_1 і \vec{H}'_0 ($\theta_1 = [0, \pi]$) гармонічне магнітне поле \vec{H}'_ω фактично не впливає на динаміку вектора \vec{M}' . У зв'язку з цим далі будемо розглядати випадки коли $\theta_1 = 90^\circ$.

Для аналізу інтенсивності поглинання енергії ГМП \vec{H}'_ω необхідно знайти тензор магнітної сприйнятливості $\hat{\chi}$, який визначається варіаційними похідними

$$\chi_{i'j'} = \frac{\delta M_{i'}}{\delta H_{\omega j'}}, \quad i', j' = x', y', z'. \quad (35)$$

Для конкретизації формули (35) спочатку перепишемо вирази (33) для $\delta\theta$ і $\delta\varphi$ через Декартові компоненти вектора \vec{H}'_ω таким чином

$$\begin{cases} \delta\theta = \gamma \frac{\omega_{cs}(\varphi_0)H_{1x'} + \omega_{sn}(\varphi_0)H_{1y'}}{\omega_{\theta 0}^2 - \omega_{z'}^2} \cdot e^{i\omega t}; \\ \delta\varphi = \gamma \left(\frac{\omega_{sn}(\varphi_0)H_{1x'} + \omega_{cs}(\varphi_0)H_{1y'}}{\omega_{\theta 0}^2 - \omega_{z'}^2} \cdot \text{ctg}(\theta_0) + \frac{1}{i\omega_{z'}} H_{1z'} \right) e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (36)$$

Комбінація формул (18), (31), (35), (36) дозволяє знайти тензор магнітної сприйнятливості $\hat{\chi}$ псевдокристалу у декартовій системі координат у такому вигляді

$$\hat{\chi} = \gamma M_0 \begin{pmatrix} \frac{\omega_{\theta 0}}{\omega_{\theta 0}^2 - \omega_{z'}^2} \cos(\theta_0) & \frac{i\omega_{z'}}{\omega_{\theta 0}^2 - \omega_{z'}^2} \cos(\theta_0) & \frac{\sin(\varphi_0)}{i\omega_{z'}} \sin(\theta_0) \\ \frac{i\omega_{z'}}{\omega_{\theta 0}^2 - \omega_{z'}^2} \cos(\theta_0) & \frac{\omega_{\theta 0}}{\omega_{\theta 0}^2 - \omega_{z'}^2} \cos(\theta_0) & -\frac{\cos(\varphi_0)}{i\omega_{z'}} \sin(\theta_0) \\ \frac{\omega_{cs}}{\omega_{\theta 0}^2 - \omega_{z'}^2} \sin(\theta_0) & \frac{\omega_{sn}}{\omega_{\theta 0}^2 - \omega_{z'}^2} \sin(\theta_0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Несподівано тензор $\hat{\chi}$ отримав зовсім просту конструкцію.

Вираз (37) для тензора магнітної сприйнятливості псевдокристалу $\hat{\chi}$ є остаточною формулою у даній роботі. Суттєво, що магнітна сприйнятливості $\hat{\chi}$ має резонанс в околі частоти $\omega_{\theta 0} = \omega_0 \cdot (1 - \lambda \cdot \cos(\theta_0))$, яка у свою чергу залежить від кута θ_0 між векторами \vec{H}'_0 і \vec{M}'_0 . Звернемо увагу також на те, що компоненти χ_{xx} , χ_{xy} , χ_{yx} , χ_{yy} тензора $\hat{\chi}$ мають стандартну конструкцію, яка зустрічається у роботах з теорії феромагнітного резонансу [12 – 14]. В той же час інші компоненти тензора мають суттєві відмінності. Так компоненти χ_{zx} та χ_{zy} тензора $\hat{\chi}$ є періодичними функціями часу. Пояснюється це тим, що в основному стані намагніченість псевдокристалу внаслідок ефекту Ейнштейна - де Гааза знаходиться у стані прецесії.

Інтенсивність поглинання енергії динамічного магнітного поля

Щоб врахувати дисипативні процеси у псевдокристалі у компонентах тензора (37), згідно з [12 – 14], необхідно виконати редукцію частоти $\hat{\chi}$ $\omega_{\theta 0} \rightarrow \omega_{\theta 0} + i\alpha\omega_{z'}$. Інтенсивність поглинання енергії ГМП, згідно із [12 – 14], визначається формулою

$$Q = \frac{\omega_{z'}}{8\pi} \text{Im}(\vec{H}'_{1\omega} \cdot \hat{\chi} \vec{H}'_{1\omega}). \quad (38)$$

У даній роботі пріоритетною є така конфігурація ГМП $\vec{H}'_{\omega} = (H_{1x'}, 0, 0) \cdot \exp(i\omega_z t)$. У цьому випадку формула (38) набуває простий вигляд

$$\begin{cases} Q = \frac{\omega_{z'}}{8\pi} \left(\gamma M_0 \frac{\alpha \omega_z \Delta_+}{\Delta_-^2 + \Delta_0^2} \cos(\theta_0) \right) H_1^2, \\ \Delta_{\pm} = \omega_{\theta_0}^2 \pm (1 + \alpha^2) \omega_{z'}^2, \\ \Delta_0 = 2\alpha \omega_z \omega_{\theta_0}. \end{cases} \quad (39)$$

На рис. 4 представлені графіки залежностей форм-фактора $F = F(\theta_0, \omega)$ інтенсивності поглинання енергії ГМП $\vec{H}'_{1\omega}$ від головних параметрів задачі, який визначається таким чином

$$F = 8\pi \cdot \frac{Q(\omega, \theta_0)}{\gamma M_0 H_1^2}. \quad (40)$$

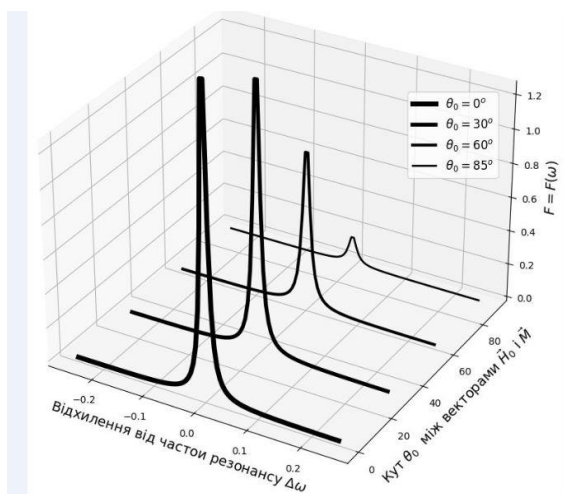


Рис. 4. Залежності форм-фактора $F = F(\theta_0, \omega)$ інтенсивності поглинання енергії ГМП $\vec{H}'_{1\omega}$ від головних параметрів задачі, які були розраховані з $\lambda = 0,25$, $\alpha = 0,01$

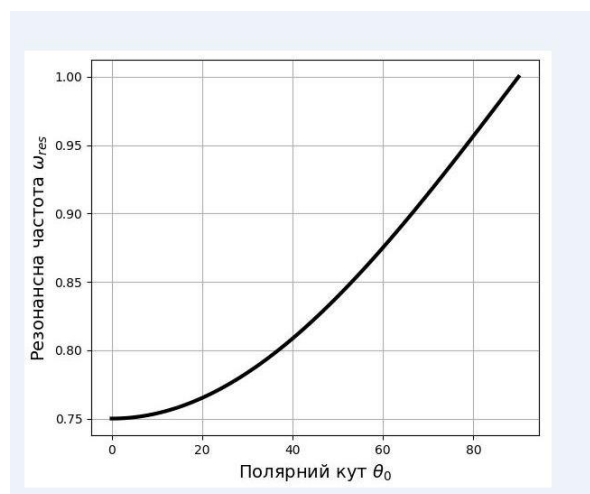


Рис. 5. Залежність циклічної частоти $\vec{\omega}_{\theta_0}$ від полярного кута θ_0 з $\lambda = 0,25$, $\alpha = 0,01$

Резонансна частота, на якій відбувається інтенсивне поглинання енергії ГМП $\vec{H}'_{1\omega}$ визначається з умови екстремуму функції $F = F(\theta_0, \omega)$ і має такий вигляд

$$\omega_{res} = \omega_{\theta_0} \sqrt{\frac{2(1 + \alpha^2)^{1/2}}{3 + \alpha^2(2 - \alpha^2)} + \frac{1}{3 - \alpha^2}}. \quad (41)$$

Із виразу (41) зрозуміло, що параметр згасання $\alpha \ll 1$ слабо впливає на величину $\omega_{res} \approx \omega_{\theta_0}$. Залежність резонансної частоти $\bar{\omega}_{res}$ від полярного кута θ_0 приведена на рис. 5.

Із рис. 4, рис. 5 видно, що з ростом полярного кута θ_0 резонансна частота $\bar{\omega}_{res}$ зростає, а інтенсивність поглинання енергії ГМП $\vec{H}_{1\omega}$ спадає.

Таким чином встановлена залежність амплітудно-частотної характеристики інтенсивності поглинання енергії ГМП $\vec{H}_{1\omega}$ псевдокристалом від його орієнтації у просторі (зміні орієнтації вектора \vec{H}'_0 у разі незмінної орієнтації вектор \vec{M}'_0 (рис. 3)) може бути покладена за основу розробки феромагнітного гіроскопа.

Висновки

1. Показано, що ФКТ, інкапсульована у наноконтейнері з характеристичним розміром, який у кілька десятків разів більший за характеристичний розмір ФКТ (1 – 12 нм), може використовуватися як чутливий елемент ферромагнітного гіроскопа.

2. Кількісні характеристики параметрів нанорозмірних чутливих елементів гіроскопа оцінено на прикладі такого структурного елемента ФКТ, як атом заліза у якого $m_a = 9,27 \cdot 10^{-23}$ г, $r_a = 1,2 \cdot 10^{-8}$ см, $k = 4$:

- кількість некомпенсованих спінів ФКТ $N \approx 288$;
- циклічна частота обертання ФКТ із $R \approx 1$ нм у стані квантової левітації буде обертатися з кутовою швидкістю порядку $\omega \approx 1,43 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{с}}$ (рух за інерцією) тільки за рахунок наявності у неї монодоменного магнітного моменту.
- величина індукції магнітного поля ФКТ буде мати таке значення $B_{\mu B} \approx 5 \cdot 10^3$ Гс.

3. Встановлено, що формально структура спектру поглинання ФКТ енергії гармонійного МП подібна до такої, що зустрічається у дослідженнях феромагнітного резонансу. Це дозволить використати досвід радіоспектроскопії у розробці феромагнітних гіроскопів з нанорозмірними чутливими елементами.

4. Побудована функціональна залежність (амплітудно-частотна характеристика) інтенсивності поглинання енергії гармонічного магнітного поля псевдокристалом від його орієнтації у просторі. Така функція може бути покладена в основу розробки феромагнітного гіроскопа, що дозволить слідкувати за зміною орієнтації літальних апаратів.

5. Конструкція феромагнітного гіроскопу формується як тривимірна, періодична, шарувата структура (штучний шаруватий кристал (псевдокри-

стал)) з чутливих елементів (рис. 3, рис. 1), жорстко закріплена на рухомій платформі, яка перебуває у зовнішньому двокомпонентному магнітному полі $\vec{H} = (H_\omega, 0, H_0)$. Статичний вектор напруженості магнітного поля \vec{H}_0 обирається строго перпендикулярним до основи псевдокристалу, а динамічний вектор $\vec{H}\omega = \vec{H}_1 \cdot \cos(\omega_2 t)$ до його бічної грані.

Перед використанням феромагнітного гіроскопа монодоменні магнітні моменти ФКТ \vec{m} необхідно зорієнтувати вздовж вектора \vec{H}_0 зовнішнім магнітним імпульсом.

Через закон збереження моменту імпульсу $\vec{L} = \text{const}$, феромагнітний гіроскоп зберігатиме фіксовані напрямки намагніченості \vec{M}_0 , незалежно від зміни напрямку вектора \vec{H}_0 перпендикулярного до рухомої платформи. При цьому зміна взаємної орієнтації векторів \vec{M}_0 і \vec{H}_0 буде супроводжуватися зміною амплітудно-частотної характеристики інтенсивності поглинання енергії гармонійного МП. Її спектральний аналіз дасть змогу судити про зміни в орієнтації рухомої платформи і формувати потрібні керуючі сигнали.

Суттєво, що у запропонованій моделі феромагнітного гіроскопа відсутні механічні компоненти. Така особливість моделі дозволить підвищити надійність конструкції і довести чутливість феромагнітних гіроскопів до рівня досягнутого у радіоспектроскопії.

Кількість чутливих елементів феромагнітного гіроскопа визначається вимогами до інтенсивності поглинання енергії гармонійного МП ФКТ, яка, у свою чергу, залежить від чутливості радіоспектрометра, що використовується для спектрального аналізу.

Список використаної літератури

1. М. М. Чепілко, С. О. Пономаренко. Фізичні основи нанорозмірних чутливих елементів феромагнітного гіроскопа. *Механіка гіроскопічних систем*. –К.: НТУУ «КПІ», Випуск №44. 2022 р. (Copernicus International)
2. С. П. Губин, Ю. А. Кокшаров, Г. Б. Хомутов, Г. Ю. Юрков. Магнитные наночастицы: методы получения, строения и свойства. *Успехи химии*. т.74, №6 (2005)
3. С. В. Терехов, В. Н. Варюхин. *Физика нанообъектов*. Донецк: ДонНУ, 418 стр. (2013)
4. Ю. М. Поплавко, О. В. Борисов, І. П. Голубєва, Ю. В. Діденко. *Магнетика у електроніці*. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 365 стр. (2021)
5. О. І. Товстолиткін, М. О. Боровий, В. В. Курилюк, Ю. А. Куницький. *Фізичні основи спінтроники*. В.: ТОВ. «Нілан-ЛТД», 500 стр. (2014)
6. С. А. Сокольский. Влияние межчастичного взаимодействия в ансамбле неподвижных суперпарамагнитных феррочастиц на статистические,

- магнитные и термодинамические свойства системы. Вычислительная механика сплошных сред. Т.14, №3, С. 264-277 (2021).
7. *Einstein A., de Haas W. J.* Experimenteller Nachweis der Ampereschen Molekularströme [Experimental Proof of Ampere's Molecular Currents]. Deutsche Physikalische Gesellschaft, Verhandlungen (German) 17, P. 152-170, (1915)
 8. *Einstein A., de Haas W. J.* Experimental proof of the existence of Ampere's molecular currents. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings 18, P. 696–711 (1915). Bibcode: 1915KNAV...18..696E.
 9. *Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц.* Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. 4-е изд., стереот. М.: Наука. Гл.ред. физ-мат.лит., 656 стр. (2005).
 10. *Л.А. Левин* О возможности создания криогенного ферромагнитного гироскопа. ЖТФ, 66, 4, С. 192 (1996).
 11. *Pavel Fadeev, Chris Timberlake, Tao Wang, Andrea Vinante, Y.B.Band, Dmitry Budker, Alexander O.Sushkov, Hendrik Ulbricht, and Derek F.Jackson Kimba.* Ferromagnetic Gyroscopes for Tests of Fundamental Physics. arXiv:2010.08731v1 [quant-ph], 17 Oct 2020.
 12. *С. В. Вонсовский.* Магнетизм. Магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро и ферромагнетиков. М.: Наука, (1971).
 13. *А. Г. Гуревич.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках, Монография. М.: Наука. Гл.ред. физ-мат.лит. 592 стр. (1973)
 14. *В. Г. Шавров, В. И. Щеглов.* Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода, Монография. М.: Наука. Гл.ред. физ-мат.лит. 568 стр. (2018) — ISBN 978- 5-9221-1806-4
 15. *Smit J., Wijn H. P. J.,* Adv. in. Electr., VI, Acad.Press, N.Y, (1954); *Smit J., Belfers H.G.,* Philips Res.Rep. 10, №2, 113 (1955). *Suhl H.,* Phys. Rev. 97, № 2, 555 (1955).
 16. *Г. В. Скроцкий, Т. В. Курбатов.* Феноменологическая теория ферромагнитного резонанса // ферромагнитный резонанс. Явление резонансного поглощения высокочастотного магнитного поля в ферромагнитных веществах / Под ред. С. В. Вонсовского, М. Наука. Гл.ред. физ-мат.лит. (1961).